

ORSAY
n° d'ordre:

PROPERTY OF GRAVITATIONAL PHYSICS

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

pour obtenir

Le titre de DOCTEUR EN SCIENCES
de l'Université Paris XI
– Sciences Physiques –

PAR
DAVID H. SHOEMAKER

SUJET:

**Contributions à l'étude de la détection interférométrique
des ondes de gravitation**

soutenue le 10 décembre 1987 devant la commission d'examen:

M. Desaintfuscien	Président
T. Quinn	Rapporteur
A. Brillet	Examinateur
A. Labeyrie	Examinateur
A. Rüdiger	Examinateur

ORSAY
n° d'ordre:

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

pour obtenir

Le titre de DOCTEUR EN SCIENCES
de l'Université Paris XI
- Sciences Physiques -

PAR
DAVID H. SHOEMAKER

SUJET:

**Contributions à l'étude de la détection interférométrique
des ondes de gravitation**

soutenue le 10 décembre 1987 devant la commission d'examen:

M. Desaintfuscien	Président
T. Quinn	Rapporteur
A. Brillet	Examinateur
A. Labeyrie	Examinateur
A. Rüdiger	Examinateur

Il est un vrai plaisir d'avoir l'opportunité de remercier les nombreux scientifiques qui m'ont aidé, directement ou autrement, dans le travail présenté ici. Dans un ordre à peu près chronologique:

Harry Shoemaker a infiltré dans mon esprit un amour et un respect pour la méthode scientifique.

Le groupe entier de *Cosmology and Experimental Gravitation* au *Massachusetts Institute of Technology* a été un cadre de soutien et une source d'exemple pendant les six ans où j'ai fait partie de cette équipe. Spécifiquement, je voudrais remercier Rainer Weiss, qui m'a donné une philosophie de la physique et de l'expérience; Daniel Dewey, qui m'a montré que les mathématiques et la physique vont bien ensemble; et Stephan Meyer, qui m'a montré que si la réponse est compliquée, elle est probablement incorrecte.

Mes deux ans avec le *Gravitationswellengruppe* au *Max-Planck-Institut für Quantenoptik* ont eu une influence profonde sur moi. L'accueil et l'appui de tout le groupe, chercheurs et techniciens également, était exceptionnel. Lise Schnupp a posé les questions difficiles qui ont exigé une compréhension des principes fondamentaux. Walter Winkler a illuminé les systèmes optiques et les pendules amortis. Roland Schilling m'a montré le bruit de grenaille, m'a avisé quand quelque chose était faux, et m'a appris les rudiments de la langue allemande. Albrecht Rüdiger m'a appris les lignes à transmission et les nuances de l'anglais. Karl Maischberger m'a donné une vision globale de l'expérience, et m'a montré comment l'on intègre la vie et la recherche.

Les laboratoires de *l'Horloge Atomique* sous la direction de M. Desaintfuscien, et de *l'Institut Henri Poincaré* sous la direction de Ph. Tourrenc, m'ont aidé bien au-delà mes espérances, et je voudrais remercier tous ceux qui ont pris du temps à me guider à travers le labyrinthe qui s'est présenté à moi.

C'est surtout Alain Brillet qui a rendu possible cette thèse, par l'invitation qu'il m'a faite de venir à Orsay, par son introduction à la physique du laser, et ses critiques constructives de mon travail. De la même façon, C. Nary Man m'a introduit à la pratique de l'optique des lasers en même temps qu'à un style de recherche qui est productif et agréable. Les membres du *Groupe de Recherches sur les Ondes Gravitationnelles* ont créé une ambiance amicale et stimulante, et

je les remercie tous: Abderrahmane Boulharts, Jean Cachenaut, Olivier Crégut, Dominique Fattaccioli, et Jean-Claude Lucenay.

L'environnement fourni par les chercheurs du *Centre de Spectrométrie Nucléaire et de Spectrométrie de Masse*, autant pour la recherche que pour la rédaction, a été une source constante d'encouragement et de plaisir. Virginie Landré a été la première à jeter un œil impartial sur ce mémoire, et ses commentaires et critiques l'ont rendu nettement plus lisible et compréhensible.

J'exprime enfin ma gratitude à T. Quinn et A. Labeyrie qui m'ont fait l'honneur d'examiner cette étude et de participer au jury.

Cette thèse est dédiée à June Shoemaker.

Table des Matières

0) Introduction	6
1) Spécification du problème	9
A) Les étoiles, les sources, les signaux	11
Un petit peu de relativité générale	11
La production des ondes de gravitation	13
Sources astrophysiques	15
B) Description des antennes interférométriques	21
L'histoire des efforts de détection	21
Principe de la détection interférométrique	24
Principes des systèmes optiques et mécaniques	27
C) Sources de bruit	35
Bruit fondamentaux	36
Bruit techniques liés à la lumière	38
Sources de bruit d'origine mécanique	44
Conclusions	47
2) Solutions particulières réalisées	49
A) Détection de signal	51
La boucle d'asservissement	53
La photodiode	55
L'amplificateur de photodiode	60
Les cellules de Pockels	65
B) Systèmes d'isolation sismique	69
Le pendule simple	70
Fonction de transfert réaliste	72
Le pendule double	75
Mécanismes de perte dans les pendules	77

C) Contrôle de la surtension, systèmes d'alignement	85
La nécessité, le concept	85
Systèmes réalistes	88
Moyens de détection	89
Moyens de contrôle	96
Senseur pont capacitif, moteur électrostatique	103
Senseur occultation, moteur magnétique	107
Conclusions	110
L'article <i>Low noise rf capacitance bridge transducer</i>	111
D) Fonctionnement de l'ensemble	117
L'article <i>Noise Behavior of the Garching 30 meter prototype gravitational wave detector</i>	118
E) Développement d'un laser Nd:YAG stabilisé	139
Introduction	139
Caractéristiques du système atomique Néodyme dans l'hôte Nd:YAG	140
Les caractéristiques statiques du laser Nd:YAG	142
Pompage	145
Opération monofréquence	155
L'état de polarisation	161
Résumé	162
Les fluctuations en puissance	163
L'asservissement du bruit de puissance	165
Les fluctuations de fréquence	167
L'asservissement en fréquence	170
Conclusions	175
L'article <i>A frequency-stabilised laser-diode pumped Nd:YAG laser</i>	176
3) Conclusions	181
4) Références	183

Partie 1 : Spécification du problème

1A) Les étoiles, les sources, les signaux

Nous donnons ici plusieurs résultats de la relativité générale qui aident à comprendre les propriétés des ondes de gravitation. Puis, nous présentons plusieurs sources astrophysiques probables afin de pouvoir définir la sensibilité et les fréquences d'intérêt.

Un petit peu de Relativité Générale

Considérons l'intervalle d'espace-temps ds^2 , où

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k ;$$

le vecteur dx consiste en les trois distances spatiales différentielles dx_1 , dx_2 , dx_3 , et la différentielle du temps dx_0 .

$$dx = \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} .$$

Dans une limite réaliste pour les sources attendues (des champs faibles, des ondes planes, créées par les objets qui se déplacent avec une vitesse faible devant la vitesse de la lumière), on peut écrire la métrique de l'espace-temps comme la métrique d'un espace Euclidien $g_{ik}^{(0)}$ plus une perturbation h_{ik} qui varie avec le temps à cause d'une onde gravitationnelle :

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}$$

La métrique de base est constante et diagonale :

$$g_{ik}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

12 Un petit peu de Relativité Générale

Dans le cas d'une onde qui se propage dans la direction x_1 , la métrique de la perturbation h_{ik} prend la forme suivante :

$$h_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}$$

avec

$$h_{22} = -h_{33}; \quad h_{23} = h_{32}.$$

Notons que l'onde est transverse (une onde qui se propage dans la direction x_1 a des amplitudes en x_2 et x_3). Il y a deux états de polarisation; un avec $h_{22} = -h_{33} = 0$ (et des termes non-nuls pour h_{23} et h_{32}), l'autre avec $h_{23} = h_{32} = 0$. On donne les noms e_+ et e_x aux vecteurs unitaires :

$$e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$e_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Une rotation de $\pi/4$ transforme l'un en l'autre, donc on dit que l'onde est de 'spin 2', en contraste avec les ondes électromagnétiques, qui ont un angle de $\pi/2$ entre les états de polarisation orthogonaux.

Les ondes se propagent suivant l'équation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h(x, t) = 0.$$

On voit que l'onde se propage avec la vitesse de la lumière c .

Prenons une onde qui se propage sur l'axe x_1 , dans l'état de polarisation e_+ (tel que les amplitudes sont maximales sur les axes x_2 et x_3), avec une dépendance sinusoïdale de h . Les fluctuations de h produisent une variation sinusoïdale dans la distance mesurée entre deux points sur l'axe x_2 ou x_3 , pour une position fixée sur l'axe x_1 . Si la séparation nominale est ℓ , et l'amplitude de l'onde h , la variation de longueur $\delta\ell$ est

$$\delta\ell = \frac{h}{2} \cdot \ell.$$

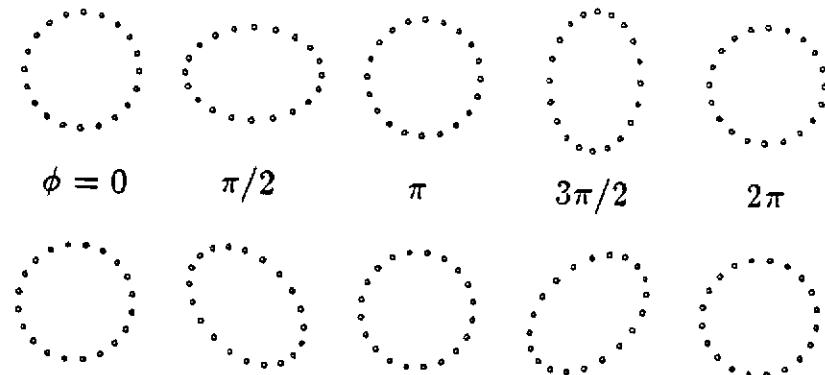


Figure 1A1 : Réponse d'un anneau de particules libres à une onde gravitationnelle. En haut: la polarisation e_+ . En bas: la polarisation e_x . L'onde se propage perpendiculairement à la feuille.

Cette expression simple est la clé pour la détection des ondes. Pour aider à visualiser l'effet observable, nous montrons dans la figure 1A1 la réponse d'un anneau de particules libres perpendiculaire à la direction de propagation (dans le plan $x_2 - x_3$) pour plusieurs phases de l'onde gravitationnelle.

La production des ondes de gravitation

Les ondes gravitationnelles sont produites par l'accélération des objets massifs, et l'amplitude des ondes devient plus grande avec les accélérations et les masses plus grandes. Cependant, parce qu'il existe un seul type de matière, le rayonnement dipolaire est interdit. La figure 1A2 est une esquisse qui aide à développer une intuition pour le processus de rayonnement gravitationnel. Les deux masses M_1, M_2 tournent autour de leur centre de masse avec une fréquence angulaire Ω . Dans le champ lointain, à cause de la conservation de la quantité de mouvement, un signal dû à une masse sera exactement annulé par le signal dû à l'autre. Mais il y aura une différence de temps d'arrivée des deux signaux, à cause de la vitesse

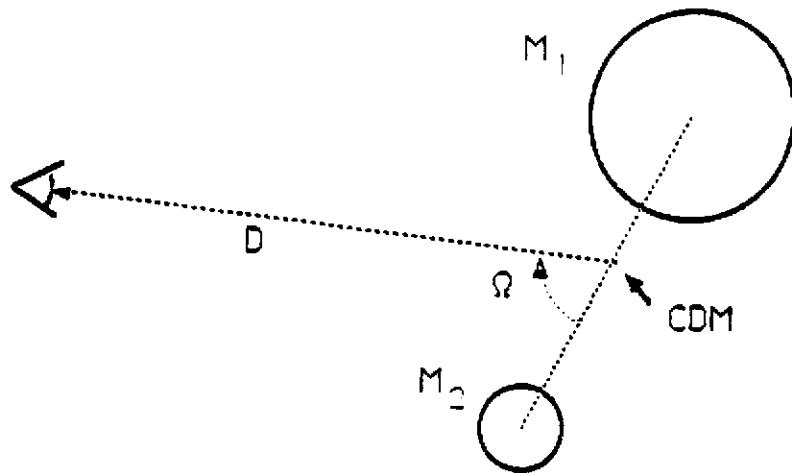


Figure 1A2 : Une source simple de rayonnement gravitationnel

finie de la propagation des ondes, et ce décalage donne lieu à une perturbation de la métrique h .

Quantitativement, on trouve [Misner'73] que la luminosité (la puissance totale émise) d'un système est proportionnelle au carré de la dérivée troisième par rapport au temps du moment quadrupolaire Ξ du système :

$$L_{og} = \frac{G}{c^5} \left\langle \frac{\partial^3}{\partial t^3} \Xi \right\rangle^2$$

où $G = 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ est la constante gravitationnelle; notons que la combinaison $G/c^5 = 3 \cdot 10^{-53} \text{ W}^{-1}$ est numériquement très petite. Autrement dit, il faut avoir des grandes accélérations des grandes masses pour rayonner des puissances appréciables. L'amplitude h de l'onde gravitationnelle de fréquence Ω à une distance D de la source est donnée par

$$h \approx \frac{1}{D\Omega} \left[\frac{GL_{og}}{c^3} \right]^{1/2}$$

L'impossibilité de détecter des ondes gravitationnelles produites dans le laboratoire est claire : si on prend une barre d'acier de longueur 10 m et de diamètre 1 m,

qu'on la fait tourner à 600 tours/minute (près du point de cassure par la force centripète), la puissance totale émise est de l'ordre de $L_{\text{eq}} \approx 10^{-31}$ W, et l'amplitude h à 10 m de la source est $h = \delta\ell/\ell \approx 10^{-36}$. Heureusement, on trouve dans les événements astrophysiques catastrophiques des accélérations des masses assez importantes pour produire des signaux détectables, bien que les sources soient à des distances considérables.

Sources astrophysiques

Ici nous décrivons plusieurs sources probables d'ondes gravitationnelles; cette liste n'est pas exhaustive, et le lecteur peut trouver des articles de revue excellents ([Thorne'87], [Deruelle'83]). Nous prenons pour la discussion une antenne canonique avec une sensibilité de $3 \cdot 10^{-23} \text{ Hz}^{-\frac{1}{2}}$ en amplitude \tilde{h} (exprimée comme une densité spectrale linéaire) entre (au moins) 100 Hz et plusieurs kHz, représentative de notre but pour des premières grandes antennes.

Binaires : Une source d'intérêt consiste en une paire d'étoiles qui orbitent autour de leur centre de masse; nous la discutons en détail parce que simple, relativement certaine, et détectable avec les premières antennes interférométriques projetées. Soient M_1 et M_2 les masses des étoiles et D la distance entre le système et l'observateur, on attend une amplitude h en fonction du temps t avant la fin de la vie du système t_0 [Dewey'86]

$$h = \frac{1}{D} \left[\frac{5G^5}{c^{11}} \frac{F^3}{(t_0 - t)} \right]^{1/4}$$

où

$$F(M_1, M_2) = \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^{1/3}}$$

et M est mesurée en unités de masse solaire ($M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg). Le système perd de l'énergie par rayonnement gravitationnel : les étoiles se rapprochent, et il en résulte une réduction de la période de l'orbite. Tôt dans la vie de la binaire, la période reste presque constante pour de nombreux cycles de l'orbite. Dans une expérience très importante, Taylor [Taylor'82] a mesuré le changement de la période P du système binaire PSR1913+16 dans ce régime pendant plusieurs années, et a pu conclure que le changement observé ($\dot{P}/P = -2.3 \cdot 10^{-12}$) est consistant avec les prédictions de la relativité générale seulement si le rayonnement gravitationnel est pris en compte. La détection directe des ondes quasi périodiques venant des binaires dans cet état d'évolution est impraticable sur la terre, à cause de la basse

16 La production des ondes de gravitation

fréquence de l'orbite même (quelque 10^{-3} Hz) : à ces fréquences, les problèmes de l'isolation d'une masse-test des mouvements sismiques sont insurmontables. D'autre part, les antennes interférométriques projetées pour l'espace [Faller'85] seraient capables de faire cette mesure.

A la fin de la vie du système binaire, quand les étoiles sont séparées par seulement plusieurs fois leur rayon, le changement de fréquence est très rapide, donnant un 'chirp' entre à peu près 100 Hz et 1000 Hz dans une période de temps d'à peu près 0.1 s. On trouve pour l'évolution de la fréquence avec le temps [Taylor'82]

$$\omega_{bg} = 2\Omega = 2 \left[\frac{256}{5} \frac{G^{5/3}}{c^5} F(M_1, M_2) (t_0 - t) \right]^{-3/8}$$

Notons que pour des masses M_1, M_2 données, l'évolution en fréquence et en amplitude est déterminée. Cette fonction est montrée sur la figure 1A3. Cette 'signature' aidera à la détection du signal. Finalement, les étoiles s'effondrent ensemble, et les calculs du rayonnement attendu sont difficiles.

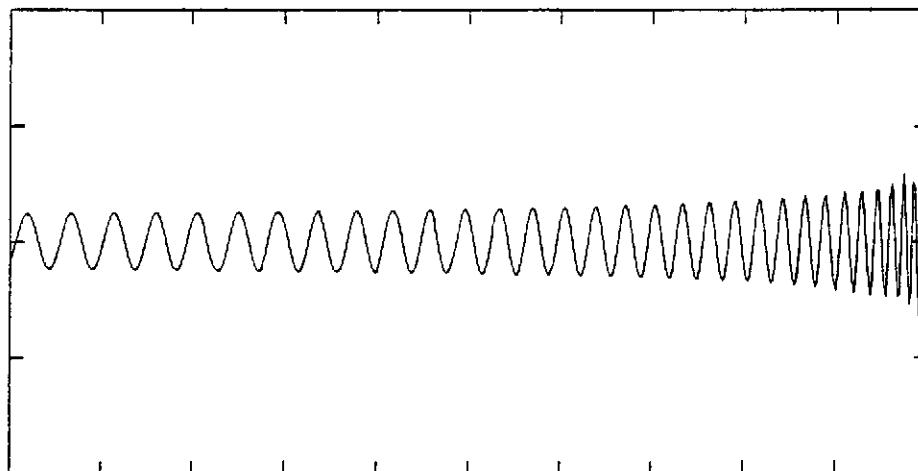


Figure 1A3 : Amplitude h en fonction du temps pour un système binaire; la durée totale est quelques centaines de ms

La détectabilité des binaires est une fonction du bruit large-bande du détecteur (normalement spécifié par racine de hertz), et de la plus basse fréquence ω_b qu'on puisse mesurer avec cette sensibilité (parce que le temps d'observation augmente si on peut commencer la mesure à des fréquences basses). Les estimations du taux de coalescence de binaires varient largement. Mais si on prend les chiffres minimums [Clark'79], et une antenne avec la sensibilité canonique (qui pourrait voir ces événements jusqu'au groupe Virgo, à une distance de 10 Mpc, où 1 pc = $3 \cdot 10^{16}$ m), on attend plus de trois observations par an. Dans le cas où la réponse du détecteur serait prolongée jusqu'à 10Hz (comme proposé par le projet Franco-Italien), les événements dix fois plus distants pourraient être détectés, augmentant de l'ordre de mille fois le taux d'événements attendus.

Supernovæ : Les supernovæ de type I (probablement les explosions des naines blanches ayant accrétié de la matière d'une étoile compagne), et de type II (probablement les effondrements gravitationnels des étoiles massives) sont des candidats comme sources de rayonnement gravitationnel. La forme de $h(t)$ n'est pas du tout certaine, parce que la connaissance des processus dans les étoiles est limitée, et parce que les calculs avec les modèles existants sont très compliqués. De plus, la propagation initiale des ondes (près de la source) est difficile à calculer. Cependant, il y des caractéristiques très générales sur lesquelles on est en accord: une amplitude $h(t)$ qui consiste en une ou plusieurs oscillations ayant de l'énergie dans les fréquences entre 200 Hz et 10 kHz, qui dure entre 1 ms et 50 ms. Plusieurs signaux calculés sont montrés dans la figure 1A4. Les amplitudes attendues sont aussi incertaines; de l'asymétrie dans l'effondrement est nécessaire pour que les ondes gravitationnelles soient rayonnées. On s'attend à ce qu'une fraction 10^{-2} (un peu optimiste!) à 10^{-6} de l'énergie totale du système Mc^2 soit rayonnée sous la forme d'ondes gravitationnelles, ce qui se traduit en amplitudes h entre 10^{-19} et 10^{-21} pour une masse solaire au centre galactique (une distance de 10 kpc) [Dewey'86]. Le taux d'événements a une limite inférieure de plusieurs par an dans notre galaxie (fixée par les observations optiques); il existe une possibilité de supernovæ optiquement 'muettes', qui montrent très peu d'activité dans le spectre électromagnétique, mais qui rayonnent des ondes gravitationnelles [Thorne'87]. En tout cas, avec une antenne ayant les caractéristiques canoniques, on attend la détection de plusieurs événements par an. Remarquons que le rayonnement

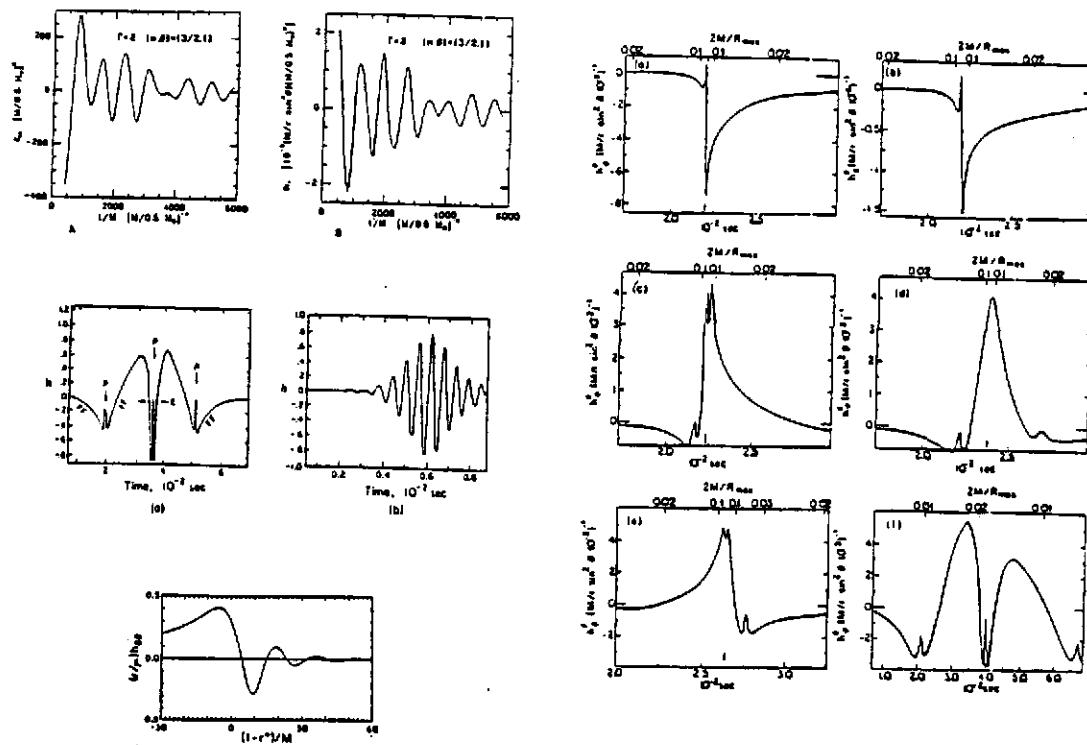


Figure 1A4 : Plusieurs formes d'ondes calculées pour les supernovæ de types I et II [Saenz'78], [Detweiler'79], [Stark'85]. La durée d'un événement typique est de 10 ms.

gravitationnel venant de la supernova qui vient de se produire (1987A) aurait été certainement détecté par les antennes interférométriques projetées.

Trous noirs : D'autres sources d'événements impulsifs sont les effondrements qui aboutissent à un trou noir, ou les vibrations d'un trou noir après avoir accrétré de la matière. Les trous noirs sont intrinsèquement des objets simples, et les théoriciens astrophysiciens sont relativement sûrs de leurs modèles pour le comportement d'un trou noir ayant été excité. Les ondes attendues pour le cas d'un trou noir produit par une étoile en rotation sont montrées sur la figure 1A5 [Stark'85]. Thorne donne pour une estimation de la fréquence et de l'amplitude

$$f \approx 1.3 \cdot 10^4 \text{ Hz} \cdot \frac{M_{\odot}}{M}$$

$$h \approx 10^{-20} \cdot \left[\frac{\epsilon}{0.01} \right]^{1/2} \cdot \frac{10^3 \text{ Hz}}{f} \cdot \frac{10 \text{ Mpc}}{D}$$

Moins sûres sont les efficacités de conversion en rayonnement gravitationnel (à cause de l'asymétrie de l'effondrement), de plus le taux des événements est inconnu; une efficacité de $\epsilon = 0.01$ est la limite supérieure, avec un taux de l'ordre de un par an dans une sphère dont le rayon est égal à la distance qui nous sépare de l'agglomération Virgo.

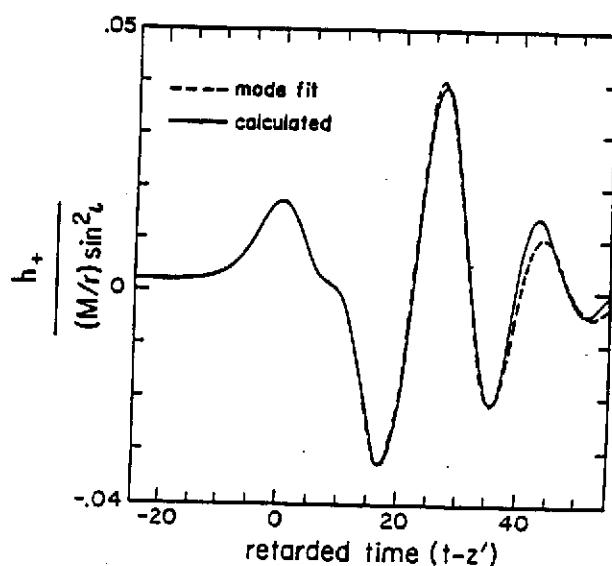


Figure A5 : Forme d'onde calculée pour un trou noir en rotation après excitation [Stark'85]

Sources périodiques : Les étoiles à neutrons en rotation (par exemple les pulsars) rayonnent s'il existe une déviation de la symétrie autour de l'axe de rotation. Plusieurs sources possibles d'asymétries ont été proposées: des irrégularités sur la surface ou 'croûte' à cause des 'tremblements de terre'; distorsions à cause des champs magnétiques; ou bien distorsions dues à une force de réaction inverse de gravitation si la fréquence de rotation est assez haute ($\approx 1 \text{ kHz}$). Il y a peu d'informations expérimentales sur les asymétries des pulsars. La fréquence de radiation serait deux fois celle de rotation si la rotation est autour d'un des

20 *La production des ondes de gravitation*

axes principaux du moment d'inertie. S'il y a un désalignement entre l'axe de rotation et les axes principaux du moment d'inertie, on aura un mouvement de précession, et les fréquences du rayonnement seront : deux fois la fréquence de rotation, mais également la fréquence de rotation plus et moins la fréquence de précession [Thorne'83]. On peut placer des limites supérieures sur le rayonnement gravitationnel de plusieurs pulsars en regardant le taux de décélération de la rotation (communiqué par des ondes électromagnétiques); on trouve des amplitudes plutôt petites (Crab : $h = 8 \cdot 10^{-25}$, 60 Hz; Vela : $h = 3 \cdot 10^{-24}$, 22 Hz; PSR1937+21 : $h = 1 \cdot 10^{-27}$, 1.25 kHz. La fréquence donnée est celle de rotation). Si on peut faire une intégration sur une base de temps très longue (de l'ordre d'un an) dans le cas de sources de fréquence bien connue, l'antenne canonique aurait une sensibilité de $h = 3 \cdot 10^{-23} / \sqrt{3 \cdot 10^7} \text{ Hz}^{-\frac{1}{2}} \text{s}^{-\frac{1}{2}} = 5 \cdot 10^{-27}$ en amplitude après un an, un niveau comparable aux limites supérieures données ci-dessus. Cependant, il y a plusieurs difficultés. D'abord, la plupart des pulsars ont des fréquences de rotation basses, où il est difficile d'isoler de façon adéquate les masses-tests des mouvements sismiques. Peut-être plus problématiques sont les corrections pour le décalage Doppler à cause des mouvements de la terre par rapport à la source [Livas'87]. Mais à tout prendre, ceci reste une source intéressante.

Résumé : Les estimations de la forme du signal, l'amplitude, et le taux des événements pour les sources probables d'ondes gravitationnelles sont incertains. Cependant, même avec un œil pessimiste, l'antenne canonique avec une sensibilité de $\tilde{h} = 3 \cdot 10^{-23} \text{ Hz}^{-\frac{1}{2}}$ entre 100 Hz et plusieurs kHz devrait détecter de l'ordre d'un événement par mois, ou plusieurs par jour avec une réponse qui s'étende vers les fréquences plus basses. Il faut ajouter que la nature est en général beaucoup plus imaginative que nous en inventant les systèmes physiques. L'expérience avec les ondes radio cosmiques n'est pas une garantie, mais l'encouragement que l'on va trouver de nombreuses sources d'ondes gravitationnelles inattendues.

1B) Description des antennes interférométriques

L'histoire des efforts de détection

L'antenne mécanique résonnante: Les premiers efforts de détection des ondes gravitationnelles ont été faits par Joseph Weber ([Weber'60], [Weber'69]). Le concept du détecteur qu'il a inventé est simple. Schématiquement (voir la figure 1B1) on a deux masses couplées par un ressort, faisant un oscillateur de fréquence ω_b ; la surtension est limitée par les pertes dans l'oscillateur, qui sont symbolisées par l'amortisseur. Une onde gravitationnelle transportant de l'énergie à la fréquence ω_b excitera cet oscillateur, dont le mouvement sera analysé par un détecteur de mouvement.

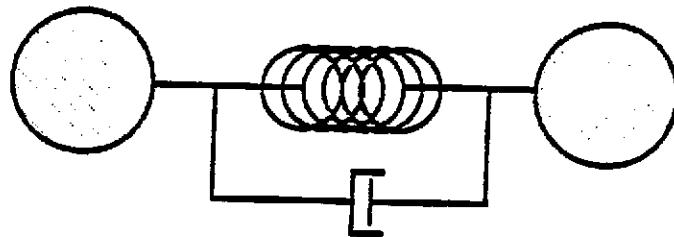


Figure 1B1: Représentation schématique d'une antenne mécanique résonnante

La forme d'une antenne résonnante réaliste (voir la figure 1B2) est dictée par plusieurs considérations. La source fondamentale de bruit dans cette antenne est le bruit thermique qui excite le mode d'oscillation; cette force excitatrice est minimisée si la surtension mécanique Q (voir section *Sources de bruit*) est maximisée. On préfère une forme géométrique très simple, normalement un cylindre, parce qu'il en résulte des surtensions hautes et une structure harmonique simple. Le barreau original de Weber était à la température ambiante, mais les barreaux d'aujourd'hui sont refroidis aux températures cryogéniques, pour réduire

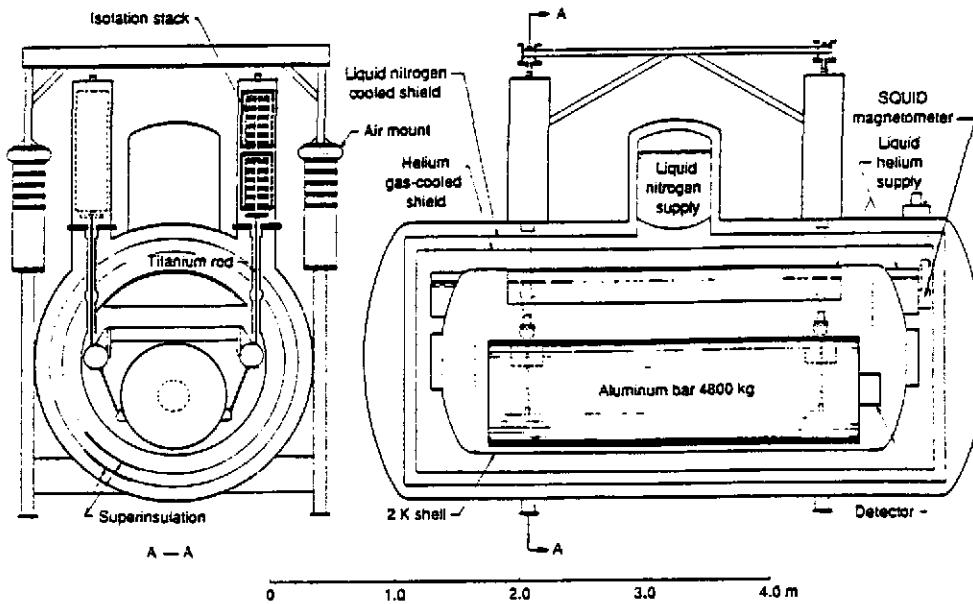


Figure 1B2: Antenne mécanique réaliste (Stanford University) [Michelson, P'87]

le bruit thermique. Les matériaux typiques, sélectionnés pour leur haute surtension intrinsèque, sont l'aluminium, le niobium, ou le saphir. Afin de maximiser la sensibilité pour les ondes venant des événements catastrophiques, une fréquence de résonance longitudinale fondamentale d'à peu près 1 kHz est désirée, ce qui donne une longueur du cylindre de l'ordre de 2 m. Naturellement, d'autres sources d'excitation parasites doivent être évitées, donc l'antenne est dans une enceinte à vide, et est bien isolée contre le bruit sismique.

La limite pratique de sensibilité vient du détecteur de mouvement. Les meilleurs sont les 'SQUIDS', et les résonateurs micro-ondes, avec un transformateur d'impédance mécanique entre le barreau et le détecteur. Par une optimisation de ce couplage et de la bande-passante, tenant compte du bruit du détecteur et de l'effet du bruit du détecteur sur le barreau ('back action'), on arrive à la meilleure sensibilité possible avec la combinaison barreau-détecteur. La technologie d'aujourd'hui

donne une sensibilité de $h \approx 10^{-18}$ et une bande-passante autour de la fréquence de résonance ($\omega_0 = 2\pi \cdot (900 \text{ Hz})$) de 0.5 Hz [Michelson,P'83]. Actuellement des efforts sont faits sur les détecteurs pour éviter cet effet de réaction, mais les problèmes expérimentaux paraissent considérables. On peut prendre pour une limite réaliste de la sensibilité des barreaux la limite quantique standard, qui est effectivement une interprétation de la relation d'incertitude de Heisenberg. Le résultat, pour les barreaux de grandeur conventionnelle, est $h \approx 10^{-20}$ [Weiss'78], un niveau qui devrait permettre la détection de plusieurs événements par an. La sensibilité actuelle en amplitude est à peu près un facteur 100 supérieur à cette limite, ou 10^4 en puissance.

L'effet principal d'une onde gravitationnelle sur un barreau est l'excitation de la résonance fondamentale ω_0 par la composante de Fourier de l'onde à ω_0 . De l'énergie aux fréquences autour de ω_0 est aussi déposée, mais la réponse est réduite suivant la courbe de résonance du cylindre. Ceci en conjonction avec le bruit à peu près blanc du détecteur de mouvement, a pour conséquence le fait que la forme spécifique d'un 'burst', par définition à large-bande, ne peut pas être reconstruite avec précision (les barreaux actuels ont une bande-passante de l'ordre de $10^{-2}\omega_0$; des améliorations dans les détecteurs de mouvement peuvent résulter en une bande-passante de plusieurs $10^{-1}\omega_0$). De plus, si les fréquences typiques du 'burst' sont loin de la fréquence de résonance du cylindre, la sensibilité de l'antenne sera nettement réduite (voir [Dewey'87] pour une comparaison entre les détecteurs interférométriques et les détecteurs résonnats mécaniques). Si on a une source monochromatique, dont la fréquence est bien connue, on peut fabriquer une antenne accordée à cette fréquence; une telle recherche est en cours dans le groupe de Tokyo [Owa'86] pour le pulsar du Crabe. Mais il est clair qu'une autre technologie serait la bienvenue.

L'histoire de l'antenne interférométrique: Apparemment l'idée d'une antenne utilisant une mesure interférométrique de la séparation entre masses-test est venue à l'esprit de plusieurs chercheurs indépendamment; Gertsenshtein et Pustovit en 1962 [Gertsenshtein'62], J. Weber dans le milieu des années soixante (non publié); R. Forward, qui a fait des efforts expérimentaux en 1971 [Forward'78]; R. Weiss à MIT autour de 1970 [Weiss'86]. Weiss a fait une étude approfondie de la sensibilité et des sources probables de bruit [Weiss'72], et Weiss et D. K. Owens ont réalisé des études expérimentales d'optique avec les lignes à retard, et de détection de faisceaux lasers limitée par le bruit de photons.

24 *Principe de la détection interférométrique*

En 1975 H. Billing au Max-Planck-Institut für Astrophysik à Garching, qui avait déjà fait une des meilleures expériences avec un barreau à température ambiante, a décidé de commencer à travailler sur un interféromètre, et a profité du travail de Weiss pour faire une maquette avec des bras de 3 m [Billing'79]. D'autres laboratoires ont débuté dans les années suivantes (Université de Glasgow, [Drever'77], Caltech [Drever'81], CNRS [Brillet'83]) et l'interféromètre de MIT était terminé avec le support financier de la NSF en 1983 [Livas'86].

Alors que la technologie des maquettes des interféromètres avançait, il devint intéressant de commencer à projeter les grands interféromètres, et en 1980 R. Weiss a proposé à la NSF de faire une étude des problèmes technologiques à propos des grands interféromètres. Il y a maintenant des projets d'interféromètres dans plusieurs pays: un projet commun entre la France (CNRS) et l'Italie (INFN), un projet en Ecosse (Université de Glasgow), un en RFA (Max-Planck-Institut) et un projet de deux antennes aux USA (MIT et Caltech).

Principe de la détection interférométrique

Action des ondes de gravitation sur les interféromètres: Nous avons vu dans la section *Les étoiles, les sources, les signaux* que quand une onde gravitationnelle d'amplitude h tombe sur un anneau de diamètre l constitué de masses libres (où l est petit par rapport à la longueur de l'onde gravitationnelle), l'effet est de changer la distance d'un montant $\delta l = (h/2) \cdot l$ entre les masses-test. On peut détecter ce changement de distance avec un faisceau de lumière. Voir la figure 1B3; si on place une séparatrice dans le milieu de cet anneau, et deux miroirs sur l'anneau de façon à former un interféromètre, l'effet de déformation de l'anneau aboutit à un déphasage de la lumière entre les deux 'bras' de l'interféromètre, et donc à un changement dans l'intensité transmise par l'interféromètre.

La sensibilité aux ondes gravitationnelles peut être améliorée avec un système optique 'replié'. La figure 1B4 illustre une possibilité; la lumière est réfléchie N fois entre les deux miroirs de cette 'ligne à retard optique' (ici dessiné avec 2 réflexions sur chaque miroir, équivalent à $N=4$ faisceaux). On pourrait analyser l'effet de ce repliage comme une augmentation de la sensibilité à un mouvement physique des masses-test, ou également comme un temps d'interaction entre la lumière et l'onde gravitationnelle plus long. Suivant la deuxième approche, la

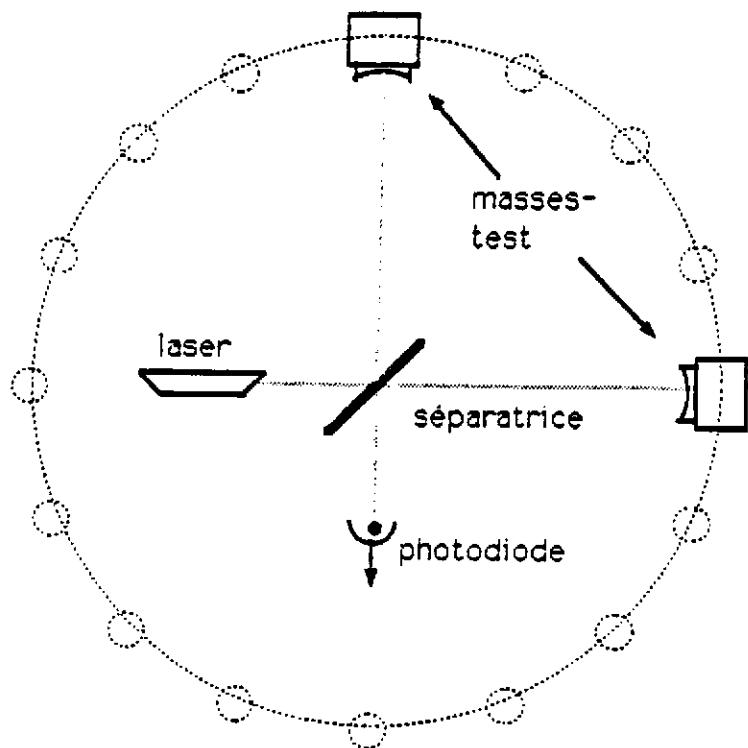


Figure 1B3: Antenne interférométrique simple schématique

différence de la longueur des chemins entre les deux bras s'écrit sous une forme qui éclaire l'effet de ce repliage [Hellings'83]:

$$\delta\ell(t) = c \int_{t-\tau}^t h(t') dt' .$$

Ici c est la vitesse de la lumière, et τ le temps d'interaction de la lumière avec l'onde gravitationnelle. Pour une ligne à retard, le temps de stockage τ est donné simplement par $N\ell/c$. Maintenant, prenons une onde sinusoïdale de fréquence f ; on voit que la valeur de l'intégrale ci-dessus est maximisée pour $\tau = 1/(2f)$. Cet effet a une analogie dans le domaine des ondes électromagnétiques: la longueur optimale d'une antenne est une demi-onde. Le résultat est qu'il y a un temps de stockage optimal pour une fréquence d'onde gravitationnelle donnée. Un point très important est que la réponse de ce détecteur est intrinsèquement large-bande, ayant un rapport d'environ 50 entre les fréquences minimum et maximum détectables. En fait, la plupart des sources d'ondes gravitationnelles émettent un signal large-bande en

26 Principe de la détection interférométrique

fréquence, et pour une classe de signaux, on peut donner une fréquence maximum moyenne. Pour simplifier la discussion qui suit, nous prenons une fréquence 'cible' de 1.5 kHz, ce qui est typique pour plusieurs sources, et parlons de la sensibilité des mouvements physiques des masses-test.

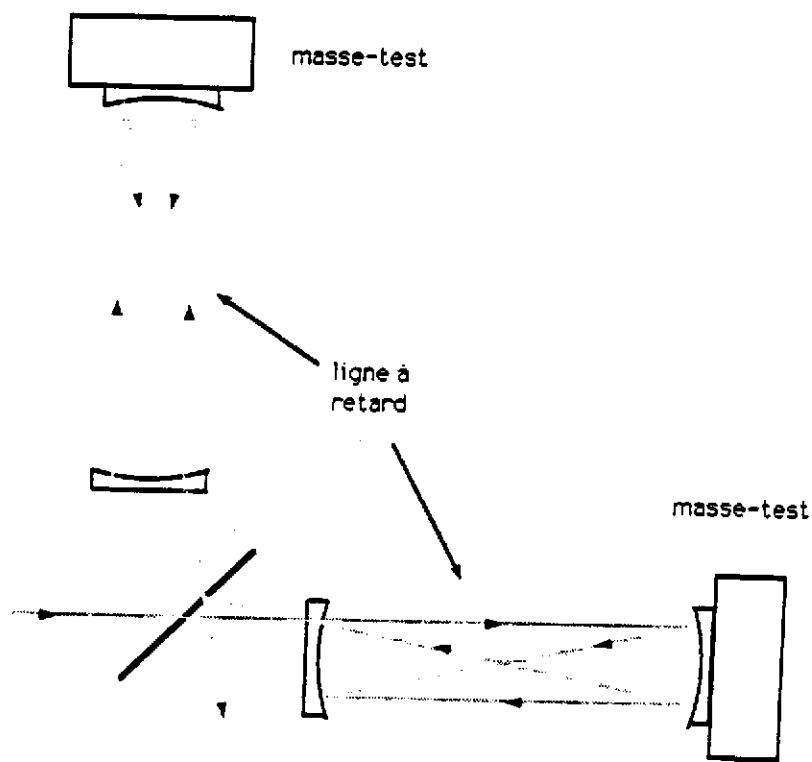


Figure 1B4: Antenne interférométrique avec lignes à retard. Le cas de $N=4$ est illustré

Principes des systèmes optiques et mécaniques

Concepts fondamentaux: Les interféromètres de Michelson, ressemblant aux esquisses ci-dessus, sont utilisés, avec un haut niveau de symétrie pour donner une insensibilité aux bruits de la source de lumière. Notons que l'interféromètre est très similaire en concept à celui de Michelson, employé il y a 100 ans pour l'expérience Michelson-Morley [Michelson'87].

Ci-dessus nous avons admis que les masses-test étaient libres et soumises seulement à la force gravitationnelle. Une grande partie de la difficulté expérimentale consiste à réaliser cette condition. La technique choisie est une suspension pendulaire des masses-test; au-dessus de la fréquence de résonance, les masses sont effectivement libres, et en plus isolées du mouvement de la terre (le 'bruit sismique'). Les miroirs d'entrée qui font partie d'un système de stockage de la lumière sont traités comme des masses-test, parce qu'ils ont la même sensibilité aux mouvements que les masses-test. Dans ce qui suit, les quatre masses sont appelées les 'masses-test'. Bien que les symétries des interféromètres de Michelson apportent une insensibilité aux fluctuations spatiales et temporelles de la lumière, la précision nécessaire et les asymétries inévitables rendent nécessaires les stabilisations en fréquence, position, et puissance de la lumière. En plus, la difficulté de diffraction exige un faisceau de mode spatial simple (idéalement TEM₀₀). L'effort pour développer une source laser, remplissant les besoins mentionnés ci-dessus, avec les puissances nécessaires, est un deuxième point de difficulté expérimentale.

Méthodes de stockage de la lumière: Deux techniques différentes sont actuellement utilisées pour augmenter le temps d'interaction de la lumière avec l'onde gravitationnelle. Chacune a des avantages et des inconvénients, et nous n'avons pas fait de choix pour les grandes antennes; les deux sont à l'étude actuellement. Parce qu'elles jouent un rôle central dans le système optique, et définissent la sensibilité aux nombreuses sources de bruit, nous les décrivons ci-dessous.

—*Ligne à retard:* La ligne à retard consiste en deux miroirs sphériques de rayon de courbure R , avec une séparation ℓ ; une telle ligne à retard est illustrée dans la figure 1B4 pour le cas spécial de la géométrie confocale ($\ell = R$). Il y a un trou, hors de l'axe, dans le miroir d'entrée (celui le plus proche de la séparatrice) qui permet au faisceau d'entrer et de sortir. Il existe une 'condition de ré-entrée' sur la longueur ℓ , qui dépend du nombre N de faisceaux désirés et du rayon de courbure des miroirs. Si la longueur ℓ est changée, le faisceau qui s'échappait à

28 Principe de la détection interférométrique

travers le trou dans le miroir proche manque le trou, et fait encore des traversées entre les deux miroirs. Il existe des distances particulières entre les miroirs, où le faisceau ressort par le trou après un nombre pair de passages N , et qui ont les propriétés spécifiques mentionnées ci-dessus, c'est à dire qui satisfont à la condition de ré-entrée. On peut monter jusqu'à plusieurs centaines de faisceaux N de cette façon. L'arrangement des faisceaux sur les miroirs est normalement un cercle, mais peut être déformé par les changements d'angle du faisceau d'entrée ou du miroir arrière.

Avec un choix approprié de l'origine, les positions des taches sur les miroirs suivent les formules

$$x_n = W \cos n\Theta$$

$$y_n = W \sin n\Theta$$

où Θ est un facteur qui dépend du rayon de courbure R et de la séparation ℓ des miroirs:

$$\cos \Theta = 1 - \frac{\ell}{R}$$

La condition de ré-entrée correspond à $N\Theta = 2\pi$. Le nombre N de faisceaux est donné par

$$N = \frac{\pi}{\arcsin\left(1 - \frac{\ell}{R}\right)} ;$$

donc on peut choisir le temps de stockage avec la distance ℓ entre les miroirs. Quand cette condition est satisfaite, comme c'est le cas pour $N = 4$ avec la séparation $\ell = R$, cet arrangement a plusieurs propriétés remarquables (voir [Herrriot'64], [Winkler'83], [Lindsay'83]). Le faisceau de sortie agit comme s'il était le faisceau d'entrée réfléchi par la surface traitée du miroir d'entrée (non existante, car il passe à travers le trou d'entrée), y compris vis à vis des translations et changements d'angles du faisceau d'entrée; la seule condition est que le faisceau reste sur les miroirs et passe à travers le trou d'entrée-sortie. Le chemin optique est indépendant au premier ordre de ces mouvements du faisceau, et des rotations et translations du miroir arrière. Cela a pour conséquence, que l'alignement des deux faisceaux des deux bras de l'interféromètre pour faire l'interférence est fait avec les miroirs d'entrée.

Le diamètre des taches de lumière sur le miroir reste constant si une condition d'adaptation est remplie, mais des variations autour de cette condition sont permises. On peut profiter de ce fait en focalisant le faisceau au niveau du trou

d'entrée-sortie, ce qui permet un trou plus petit; le 'coût' est que les taches sur les miroirs seront plus grandes. Un point intéressant est que la ligne à retard supporte un faisceau multi-mode, donc il n'est pas critique que le faisceau soit strictement monomode.

On peut écrire le changement de phase $\delta\phi_{L-R}$ dans une seule ligne à retard à cause d'un onde gravitationnelle de fréquence ω_g et d'amplitude h :

$$\delta\phi_{L-R} = \frac{h}{2} 2\pi \frac{Nl}{\lambda} \frac{\sin \omega_g \tau/2}{\omega_g \tau/2} \cos(\omega_g t) .$$

Cette fonction est montrée dans la figure 1B5. Le changement dans la différence de phase entre deux bras orthogonaux sera deux fois $\delta\phi_{L-R}$ si l'onde est normale au plan de l'interféromètre. Pour $N = 2$ la fonction représente la réponse d'un interféromètre simple.

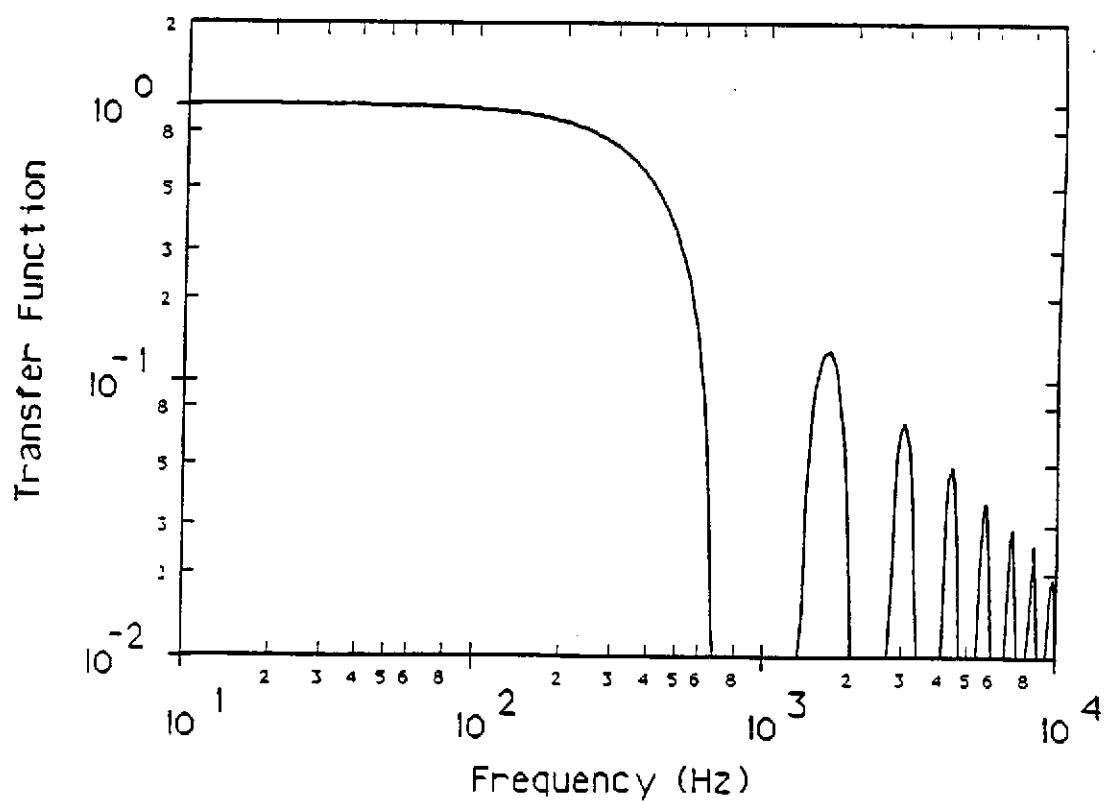


Figure 1B5: Réponse en fréquence d'une antenne comportant des lignes à retard.

30 Principe de la détection interférométrique

Notons que si les miroirs ont une réflectivité de R en puissance, après N aller-retours l'intensité tombe d'un facteur $I/I_0 = R^N$ à la sortie.

Il faut mentionner deux désavantages des lignes à retard. Le premier est que la condition de ré-entrée met une exigence très forte sur l'égalité des rayons de courbure pour les quatre miroirs des deux lignes à retard. Si on a une différence entre les deux lignes à retard, et si on met chaque bras sur sa propre condition de ré-entrée, les longueurs des bras seront différentes. Si on demande que les deux bras aient la même longueur ℓ , les faisceaux ne seront pas confondus, et il en résultera une mauvaise visibilité des franges d'interférence.

L'autre problème est le diamètre des miroirs nécessaire pour une antenne de plusieurs kilomètres de longueur. Pour éviter des problèmes liés à la diffusion, il faut que les taches de lumière sur les miroirs soient séparées par plusieurs fois leur rayon (où le rayon est défini comme la distance entre l'axe du faisceau et le point où l'intensité est réduite d'un facteur $1/e^2$). Le rayon d'un faisceau $\lambda = 1 \mu\text{m}$ est de l'ordre de 3.5 cm pour une antenne de longueur $\ell = 3 \text{ km}$; si on a $N=30$, donc 15 taches, le miroir doit avoir un diamètre de l'ordre de 1 m. Pour plusieurs raisons détaillées ci-dessous, la profondeur doit être à peu près égale au diamètre. C'est un miroir énorme, et à la limite de la technologie disponible pour le polissage et pour le traitement. Une alternative, qui consiste en miroirs séparés pour chaque tache, est à l'étude [Leuchs'87]; on échange là, la difficulté de fabrication des miroirs contre la complexité du montage et de l'alignement.

—*Fabry-Perot*: L'autre arrangement optique utilisé pour augmenter le temps de stockage est la cavité Fabry-Perot, dessinée dans la figure 1B6. Il s'agit encore de deux miroirs sphériques; cependant, les faisceaux sont confondus dans la cavité, et pour laisser entrer et sortir la lumière, on donne au miroir d'entrée une transmission finie. La condition pour que le faisceau réfléchi recouvre le faisceau incident à chaque aller-retour donne une gamme de modes dépendante du rayon de courbure des miroirs et de leur séparation. On essaye d'exciter seulement le mode spatial le plus simple (TEM_{00}), celui avec une enveloppe d'intensité gaussienne simple, et de tenir ce mode 'en résonance', c'est à dire de maintenir soit la longueur, soit la fréquence d'illumination de façon à ce que le faisceau se recouvre lui-même.

Pour calculer la sensibilité d'un Fabry-Perot à un changement de longueur, on écrit le champ électrique E_n sortant après n aller-retours de la lumière:

$$E_n = -A_0 T_1^2 R_2 (R_1 R_2)^{n-1} e^{i(\omega t + i\phi_n)}$$

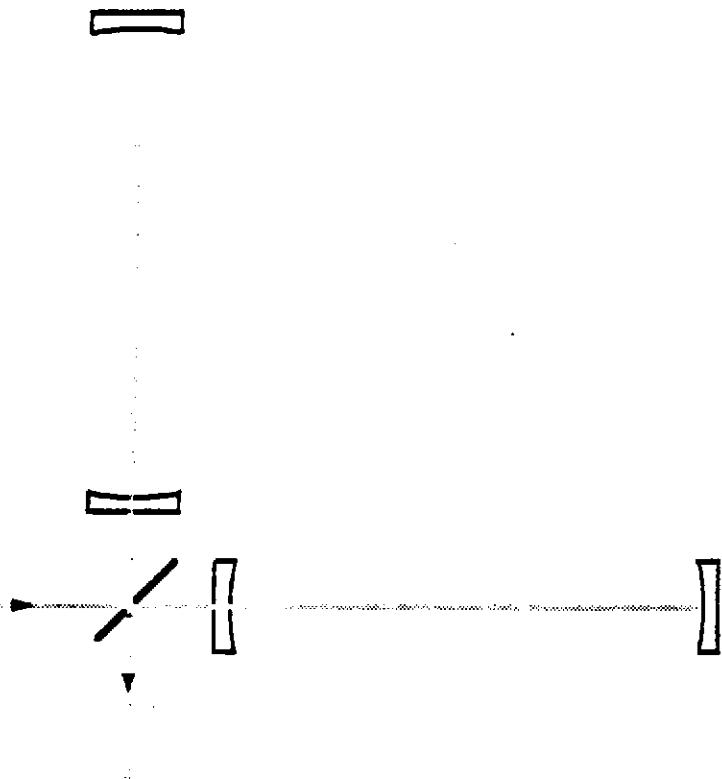


Figure 1B6: Antenne interférométrique avec les cavités Fabry-Perot

où l'amplitude initiale est A_0 , T_1 et R_1 réfèrent à la transmission et à la réflexion du miroir d'entrée, R_2 est la réflectivité du miroir de sortie, et $\phi_n + \pi$ est la différence de phase entre le faisceau original et le faisceau n . On peut sommer les termes $n = 1 \dots \infty$ dans une somme géométrique, et dans le cas où la cavité a une longueur ℓ qui est très proche d'un multiple de $\lambda/2$, le résultat pour le changement de phase produit par une onde gravitationnelle sur la lumière réfléchie par la cavité est simple:

$$\delta\phi = 2h\mathcal{F} \frac{\ell}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \cos(\omega_g t)$$

où

$$\mathcal{F} = \frac{\pi(R_1 R_2)^{1/4}}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})} .$$

La finesse \mathcal{F} a une relation simple avec le temps de stockage τ_{FP} (ici défini comme le temps de décroissance de l'intensité d'un facteur $1/e^2$ dans la cavité, si la source de lumière est coupée brusquement): $\tau_{FP} = 2F\ell/\pi c$. L'expression ci-dessus est

32 Principe de la détection interférométrique

correcte dans la limite des longueurs d'ondes gravitationnelles plus longues que la distance entre les deux miroirs, $2\pi/\omega_g \gg \ell/c$; ceci est montré dans la figure 1B7. Dans le cas où $N_{LR} = 2\mathcal{F}/\pi$, la sensibilité d'une antenne serait la même avec une ligne à retard ou un Fabry-Perot pour le stockage de la lumière en basses fréquences; le Fabry-Perot ne subit pas les 'trous' périodiques en réponse ('Hosenbeine') vus dans la fonction de transfert de la ligne à retard.

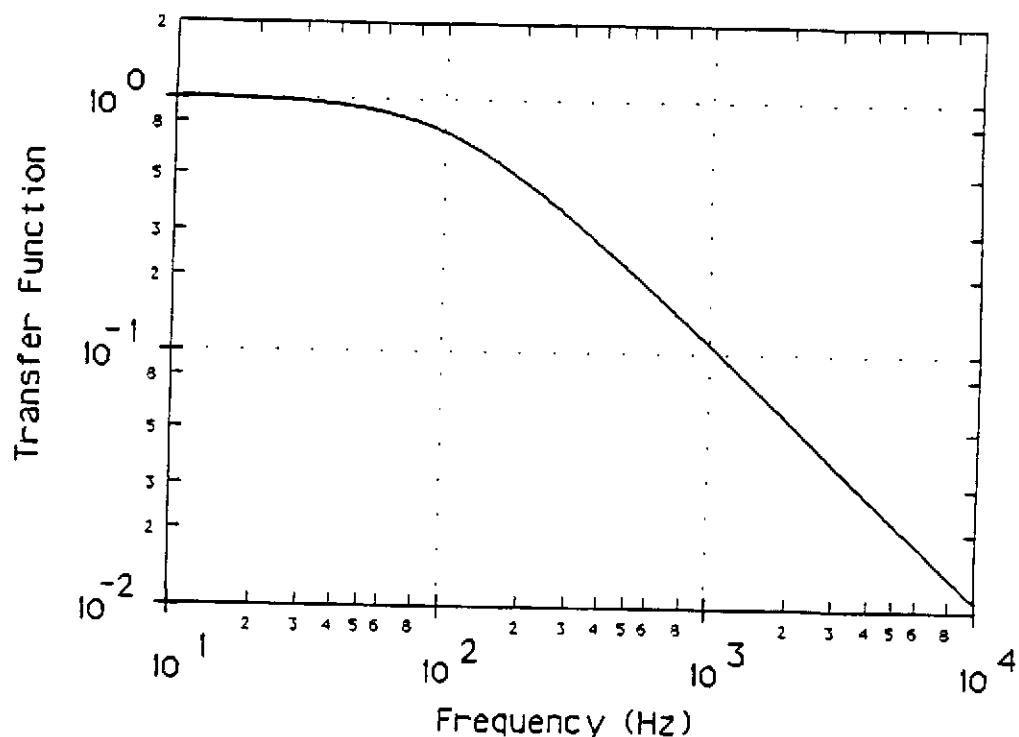


Figure 1B7: Réponse en fréquence d'une antenne comportant des Fabry-Perot.

Un grand avantage du système Fabry-Perot est que les miroirs sont beaucoup plus petits que dans le cas d'une ligne à retard, les faisceaux étant superposés; un diamètre de quelque 20 cm suffit. Par conséquent, le polissage et le traitement sont possibles avec la technologie actuelle. Les fréquences des modes normaux des miroirs sont beaucoup plus hautes que celles des signaux astrophysiques. En plus, il est facile de faire des temps de stockage assez longs pour la détection optimale des ondes gravitationnelles de basses fréquences.

Il y a aussi des désavantages : les miroirs doivent être tenus en alignement précis, et les modes fondamentaux des deux bras doivent être les mêmes, excités identiquement, afin que la qualité de l'interférence entre les deux bras soit haute. La lumière doit passer à travers une longueur importante du substrat du miroir, donnant une sensibilité aux inhomogénéités et mouvements du substrat. Le sensibilité au bruit de fréquence du laser et à la pression résiduelle dans le chemin optique est plus haute. La possibilité que des effets non-linéaires (bistabilité, chaos) pourraient être importants est à l'étude [Deruelle'84].

Jusqu'à maintenant, la performance des maquettes avec les lignes à retard a été mieux comprise que celle des maquettes avec les Fabry-Perot, en raison de leur simplicité relative. On espère rectifier cette situation pour qu'un choix entre les deux devienne possible. Il faut souligner que pour un temps de stockage et une puissance dans l'interféromètre donnés, la sensibilité aux ondes gravitationnelles est effectivement la même pour les deux systèmes de stockage.

1C) Sources de bruit

On a vu que l'amplitude des signaux gravitationnels attendus est minuscule. Bien que nous ayons choisi des moyens très sensibles pour détecter un signal gravitationnel, la mesure sera limitée par les bruits dans l'appareil. En fait, il est important d'avoir une compréhension complète des sources de bruits pour plusieurs raisons : plus tard, lors de l'analyse du signal des grandes antennes, il sera nécessaire de différencier entre les bruits et les vrais signaux; leur comportement avec la fréquence, leur statistique, etc..., peuvent aider à la reconnaissance des signaux. Pour améliorer la sensibilité de la mesure, il faut connaître la source de bruit qui donne la limite présente (souvent on ne peut découvrir cette source qu'avec des méthodes indirectes, en trouvant le rapport entre le niveau de bruit et des paramètres variables). Une des raisons les plus importantes est le besoin de prévoir la sensibilité des grandes antennes.

Les maquettes des détecteurs interférométriques jouent ici un rôle très important car elles nous permettent de tester des modèles de bruit dans un environnement similaire ou bien identique à ce qui existera dans les grands interféromètres. Les discussions suivantes sont orientées autour des grands interféromètres; dans une section ultérieure (*Fonctionnement de l'ensemble*) les bruits sont discutés dans le cadre des maquettes. Afin de mettre la discussion sur un fond réaliste, on va évaluer l'ampleur des bruits pour une antenne 'canonique': une longueur de bras $\ell = 3$ km, une masse des miroirs (en fait les masses-test) $m = 500$ kg, un facteur d'amplification du mouvement des miroirs $N = 30$ (égal au nombre de faisceaux dans le cas d'une ligne à retard, et à $2\mathcal{F}/\pi$ pour le Fabry-Perot où \mathcal{F} est la finesse; ce qui donne une sensibilité maximale pour une onde gravitationnelle de fréquence 1.5 kHz), une puissance dans l'interféromètre d'un kilowatt, et enfin une sensibilité en amplitude $\tilde{h} = 3 \cdot 10^{-23} \text{ Hz}^{-\frac{1}{2}}$.

Bien que les signaux attendus soient de la forme d'une amplitude sans dimension $h \equiv \delta\ell/\ell$, il est plus pratique de donner les amplitudes de bruit sous la forme d'un déplacement effectif des miroirs \tilde{x} pour une largeur de bande d'un hertz, car les sources de bruit sont en général à large-bande en fréquence et peuvent être représentées souvent comme les mouvements effectifs $\delta\ell$ d'un miroir. Donc, les

bruits sont donnés en $\text{m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$, une densité spectrale linéaire; pour convertir en amplitude \tilde{h} , il faut diviser par ℓ , la longueur des bras de l'interféromètre. Les bruits doivent être comparés avec le mouvement d'un miroir qui correspond à notre sensibilité canonique en \tilde{h} ; ce nombre est $\tilde{x} = 10^{-19} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$ pour une longueur de bras de $\ell = 3 \text{ km}$.

Bruits fondamentaux

Deux types de bruit peuvent être considérés comme fondamentaux: le bruit de grenaille dans la détection et celui des fluctuations de la pression de radiation. Dans les deux cas, la probabilité de l'arrivée d'une particule (un électron ou un photon) est indépendante du temps d'arrivée de la particule précédente, et le temps d'arrivée est une fonction aléatoire (statistique de Poisson). Le résultat est une fluctuation δn dans le taux d'arrivée des particules n égale à la racine du taux de particules: $\delta n = \sqrt{n}$. Pour un photocourant, ces fluctuations portent le nom de 'bruit de grenaille', et la relation entre le photocourant et les fluctuations prend la forme

$$\tilde{i} = \sqrt{2eI}$$

où e est la charge de l'électron, I est le courant continu, et \tilde{i} est la fluctuation exprimée comme une densité spectrale linéaire (dans une unité $\text{A} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$). Cette incertitude dans le photocourant se rapporte à l'incertitude dans la position des miroirs de l'interféromètre, suivant

$$\tilde{x}_g = \frac{\lambda}{2\pi N} \sqrt{\frac{2e}{I}}$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière, et N est le nombre effectif de plages dans le système de stockage de la lumière. Notons que N est limité par la gamme de fréquence des ondes de gravitation (le temps de stockage ne devrait pas être plus long qu'une demi-période), et que λ ne peut pas être beaucoup plus court que $0.5 \mu\text{m}$ (un problème relié à la technologie laser). Il reste I pour augmenter la sensibilité de détection, qui est proportionnel à la puissance laser $P = \eta I$, où η est l'efficacité quantique de la photodiode ($0 \leq \eta \leq 1$). Si on envisage une sensibilité de $\tilde{h} = 3 \cdot 10^{-23} \text{ Hz}^{-\frac{1}{2}}$, une puissance d'un kilowatt sera nécessaire dans l'interféromètre. Etant donné l'importance fondamentale et immédiate de cette limite, nous allons discuter en détail dans la section *Détection de signal* le problème réel de mesure, et dans la section *Développement d'un laser Nd:YAG stabilisé* les possibilités d'obtenir les puissances nécessaires.

Les fluctuations de pression de radiation, agissent sur les composants optiques, produisant un bruit de déplacement blanc en amplitude

$$\tilde{x}_r(\omega) = \frac{4N}{m\omega^2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar P}{\lambda c}}$$

où m est la masse d'un miroir, ω la fréquence de mesure, et $2\pi\hbar$ la constante de Planck; et où on a tenu compte de l'influence incohérente sur les quatre masses-test. Notons qu'ici la puissance P apparaît au numérateur alors que le bruit de grenaille est inversement proportionnel à la racine carrée de la puissance; ainsi on peut trouver un minimum de bruit compte tenu des deux bruits 'fondamentaux', qu'on peut appeler limite quantique pour les détecteurs interférométriques. Pour l'antenne canonique, ce bruit correspond à un mouvement effectif à 1.5 kHz de $10^{-25} \text{ mHz}^{-\frac{1}{2}}$, six ordres de grandeur plus petit que celui du bruit de grenaille. Si l'antenne était optimisée pour 75 Hz, la limite quantique serait obtenue avec une puissance de 5 kW, donnant une sensibilité de $2.3 \cdot 10^{-21} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$, ou $\tilde{h} = 8 \cdot 10^{-26} \text{ Hz}^{-\frac{1}{2}}$. C'est seulement dans une deuxième génération d'antennes que ce bruit pourrait devenir important.

Bruits techniques liés à lumière

Fluctuations d'indice du gaz résiduel: L'interféromètre sera contenu dans une enceinte à vide pour plusieurs raisons: pour réduire l'influence du bruit acoustique, celle du bruit thermique dans le système d'isolation sismique (voir la section *Systèmes d'isolation sismique*), et les fluctuations d'indice sur le trajet de la lumière. Pour les pressions telles que le libre parcours moyen des molécules est plus grand que le diamètre du faisceau, on peut calculer le nombre moyen de molécules dans le faisceau. Ce nombre fluctue à cause du mouvement thermique des molécules. Connaissant leur vitesse thermique on obtient une densité spectrale, que l'on interprète comme une fluctuation d'indice. Il faut distinguer deux cas, pour les deux moyens utilisés pour replier la trajectoire du faisceau. Pour la ligne à retard, les faisceaux multiples suivent les chemins différents, et il y a peu de corrélation entre les faisceaux différents. Dans ce cas, on trouve [Rüdiger'81]

$$\tilde{x} \approx \left[\frac{2 \cdot \sqrt{3\pi} \cdot (n_0 - 1)^2}{\frac{N_A}{V_0} \cdot c_o \cdot \sqrt{\lambda}} \cdot N \cdot \sqrt{\ell} \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right) \cdot \left(\frac{T_0}{T} \right)^{3/2} \right]^{1/2}$$

où N_A est le nombre d'Avogadro ($6.02 \cdot 10^{23}$ molécules/mole), V_0 est le volume d'une mole de gaz aux conditions de pression et de température normales ($22.4 \cdot 10^{-3}$ m 3 /mole), n_0 est l'indice du gaz, $c_o = \sqrt{2k_B T / m_m}$ la vitesse thermique la plus probable dans le gaz ($k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ est le facteur de Boltzmann, T est la température absolue, et m_m est la masse d'une molécule), et p_0 et T_0 sont les pressions et températures standard.

Dans le cas du Fabry-Perot, le faisceau fait plusieurs passages à travers la même colonne de gaz dans le temps que met une molécule pour traverser le faisceau. Donc le faisceau subit la même fluctuation plusieurs fois, donnant un accentuation de l'effet; en gros, on attend un effet \sqrt{N} plus grand, ou autrement dit, on a besoin d'un vide N fois meilleur pour un système Fabry-Perot.

Notons que, par contraste avec presque tous les autres composants dans les grandes antennes, il n'est pas pratique de changer le système de vide pour une deuxième génération de détecteurs: ce serait trop cher. Donc, le système doit être capable d'atteindre la plus basse pression prévisible pour la durée de vie de l'installation. Pour donner un ordre de grandeur, pour l'hydrogène (qui sera le gaz principal dans l'enceinte à vide) à $T = 300^\circ K$, nous avons $n_0 \approx 1 + 1.4 \cdot 10^{-4}$ et $c_o \approx 2 \cdot 10^4$ m·s $^{-1}$, et pour une pression de 10^{-4} Pa, on trouve $\tilde{x} \approx 5 \cdot 10^{-20}$ mHz $^{-\frac{1}{2}}$ avec les paramètres de l'antenne canonique.

Fluctuations d'intensité du laser: Les fluctuations d'intensité du laser peuvent donner un signal indésirable de deux façons différentes. La pression de radiation joue encore un rôle, mais cette fois l'action est cohérente sur les masses-test. Par contre, les mouvements sont symétriques dans l'interféromètre et s'annulent en grande partie. On a

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{4\epsilon N}{m\omega^2 c} \cdot \frac{\delta\tilde{P}(\omega)}{P}$$

où ϵ est une mesure (entre 0 et 1) du déséquilibre de la puissance et/ou de la masse entre les deux bras de l'interféromètre, et $\delta\tilde{P}(\omega)/P$ est la densité spectrale linéaire des fluctuations relatives de puissance du laser. Ceci met une condition sur la séparatrice : il faut faire une division exacte entre les deux bras de l'interféromètre. Une autre source de déséquilibre avec les cavités Fabry-Perot est la différence de finesse entre les deux bras. En tout cas, on espère obtenir un ϵ de 10^{-2} . Le $\delta\tilde{P}(\omega)/P$ dépend du laser et de la fréquence de mesure, mais on peut donner $10^{-4} \text{ Hz}^{-\frac{1}{2}}$ comme un chiffre prudent. Pour les conditions canoniques, et avec $\omega = 2\pi \cdot 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, on trouve $\tilde{x} = 2 \cdot 10^{-21} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$, un niveau plus bas que la sensibilité désirée. Si, dans une deuxième génération d'antennes, il devient nécessaire de réduire le bruit, un asservissement ne sera pas difficile à réaliser. Le deuxième moyen par lequel les fluctuations d'intensité peuvent gêner la mesure est de produire un bruit en excès du bruit de photons sur la photodiode. Cependant, au-dessus d'une fréquence de plusieurs MHz, les lasers en général ont un bruit en puissance égal au bruit de photons; avec un système de modulation, on peut faire la détection du signal à ces fréquences élevées; voir la section *Détection de signal*.

Fluctuations de fréquence: La sensibilité au bruit de fréquence est encore une fonction d'une asymétrie de l'interféromètre: une différence dans le temps de stockage de la lumière entre les deux bras produit l'interférence entre des photons émis par le laser à des temps différents. Il y a un effet direct venant d'une différence de longueur des bras ou d'une différence de finesse, et un effet indirect venant de la lumière diffusée.

On a mentionné ci-dessus (dans la section *Description des antennes interférométriques*) la nécessité de maintenir la séparation correcte entre les deux miroirs de la ligne à retard pour faire sortir la lumière à travers le trou d'entrée. Cette séparation est une fonction du nombre de faisceaux désiré et du rayon de courbure des miroirs. Le problème survient quand les deux lignes à retard n'ont pas des

miroirs de même rayon de courbure, ce qui produit une différence de longueur $\Delta\ell = \ell_1 - \ell_2$ et ainsi une différence dans le temps de stockage $\Delta\tau_s = N\Delta\ell/c$. On compare les fréquences du laser aux temps t et $t + \Delta\tau_s$, et s'il y a un changement, un signal est produit. On peut trouver le mouvement équivalent des miroirs qui est produit pour un bruit relatif de fréquence $\tilde{\delta\nu}/\nu$:

$$\tilde{x} = N\Delta\ell \cdot \frac{\tilde{\delta\nu}}{\nu}.$$

Dans le cas d'un Fabry-Perot, la différence de finesse \mathcal{F} entre les deux bras joue aussi un rôle:

$$\tilde{x} = \frac{2(\mathcal{F}_1\ell_1 - \mathcal{F}_2\ell_2)}{(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)} \cdot \frac{\tilde{\delta\nu}}{\nu}$$

On demande que ce bruit soit plus petit que le bruit de grenaille. Avec la fabrication conventionnelle pour les miroirs d'une ligne à retard, on attend que $\Delta\ell/\ell = 10^{-3}$ sera possible, c'est à dire une différence de rayon de courbure de 3 m sur 3 km, ce qui correspond à une précision sur la flèche de l'arc (qui est en totale quelque 15 μm) d'à peu près 0.15 μm . Ceci exige un bruit de fréquence inférieur à $\tilde{\delta\nu} \leq 3 \cdot 10^{-7} \text{ Hz} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$, un but difficile mais pas impossible à atteindre. Jusqu'à présent, les miroirs pour les Fabry-Perot ayant une reflectivité bien adaptée ne sont pas disponibles; par contre, on peut ajuster $\Delta\ell$ indépendamment de \mathcal{F} (quelques mètres) pour minimiser la sensibilité de ce bruit-ci, si on est déjà près du minimum.

Un deuxième effet vient de la diffusion de la lumière par les miroirs [Billing'78]. L'effet de la diffusion est d'augmenter la largeur angulaire du faisceau gaussien qui est réfléchi. Pour la ligne à retard, ceci implique qu'une partie du faisceau qui devrait s'échapper à travers le trou d'entrée reste dans la ligne à retard, faisant de nombreux circuits avant d'être atténuée. Un petite partie de cette lumière 'prisonnière' rejoint le faisceau primaire avec l'aide d'une deuxième diffusion, mélangeant 'vieille' et 'jeune' lumière. Parce que les deux lignes à retard ne seront pas identiques en ce qui concerne la diffusion, l'effet ne s'annule pas pour les deux bras. Si la fréquence était absolument constante, 'vieille' et 'jeune' lumière auraient un déphasage constant. En fait, la fréquence aura un bruit $\tilde{\delta\nu}$, donnant un mouvement apparent de:

$$\tilde{x} \approx \sigma\ell \cdot \frac{\tilde{\delta\nu}}{\nu}$$

où σ est l'amplitude relative de la lumière deux fois diffusée qui fait interférence avec le faisceau primaire. Ce σ est une fonction de l'angle et de la taille des

faisceaux, mais quand on tient compte de tous les effets, σ est indépendant de la longueur de la ligne à retard. Les miroirs disponibles actuellement ont un σ égal à peu près à 10^{-4} . Pour que ce bruit soit plus petit que le bruit de grenaille, il faut que le bruit de fréquence soit inférieur à $\delta\nu \leq 10^{-4} \text{ Hz} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$, une exigence moins forte que la précédente.

On n'a pas encore bien étudié les effets de la diffusion dans le système Fabry-Perot. L'effet de la diffusion sera une excitation d'un mode autre que le fondamental TEM₀₀; avec une deuxième diffusion, la lumière diffusée pourrait rentrer dans le mode fondamental, ayant subi un déphasage par rapport au faisceau primaire. Les coefficients de couplage entre les modes seront une fonction de la structure de mode de la cavité. Il n'est pas encore possible de donner un ordre de grandeur pour l'effet.

Afin de placer les sensibilités dans un contexte réaliste, notons qu'avec les lasers Argon un bruit de fréquence de $10^{-3} \text{ Hz} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$ a été atteint [Shoemaker'85], utilisant une ligne à retard de 30 m de longueur pour référence de fréquence. Des améliorations peuvent être attendues avec des bras d'interféromètres plus longs et des puissances plus grandes.

Lumière diffusée par les parois : La lumière diffusée par les miroirs peut rejoindre le faisceau principal par un autre chemin, celui d'un reflet partiel par les parois de l'enceinte à vide. Les mouvements des parois se traduisent en changements de longueur optique de ce chemin, aboutissant à une source de bruit dans l'interféromètre. Cet effet est proportionnel à la lumière diffusée par les miroirs (caractérisés par un σ , comme ci-dessus, mais d'une valeur plus petite parce que l'angle de diffusion est plus grand) et à la réflectivité des parois. Cette dernière est une fonction de l'endroit de la réflexion : si c'est près du milieu de la longueur de l'enceinte à vide, l'angle d'incidence est très petit, et la réflectivité est très grande; près d'un bout du tube, c'est la diffusion de la surface des parois qui détermine l'effet. Les parois sont excitées par le mouvement sismique de la terre, les pressions acoustiques, et peut-être les vibrations des pompes à vide.

Winkler [Leuchs'87] a fait une estimation de l'ordre de grandeur de cet effet pour les tubes, qui est basée sur les mesures de $\sigma(\theta)$ et la réflectivité des matières probables des tubes (inox, aluminium), et valable pour les deux systèmes de stockage

de la lumière. Prenant pour le mouvement des parois le bruit sismique typique $\tilde{x}_{sis} = 10^{-7}/f^2 \text{ m}\cdot\text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$, il a trouvé

$$\tilde{x} \approx 10^{-20} \ell \left[\frac{1 \text{ Hz}}{f} \right]^2.$$

Cela donne pour l'antenne canonique un bruit équivalent au bruit de photons à 18 Hz. Des déflecteurs annulaires peuvent réduire la réflectivité des parois, et donc cet effet; par contre, ce serait difficile de réduire nettement le mouvement des parois, ou même d'arriver au niveau pris ci-dessus.

Fluctuations de position du faisceau: Le problème de sensibilité des interféromètres aux mouvements du faisceau peut être séparé en deux parties: la sensibilité de l'interféromètre 'intérieur' (entre la séparatrice et les miroirs proches du système de stockage de la lumière), et la sensibilité de l'interféromètre 'extérieur' (ligne à retard ou Fabry-Perot).

L'interféromètre intérieur peut être analysé comme un interféromètre de Michelson simple en ce qui concerne les mouvements du faisceau laser qui l'illumine. Dans un interféromètre parfaitement symétrique, la sensibilité au mouvement du faisceau est nulle. S'il y a une erreur angulaire θ de la séparatrice, un mouvement latéral du faisceau \tilde{y} se traduit par un mouvement apparent des miroirs $\tilde{x} \approx \theta \tilde{y}$. S'il y a une différence de longueur $\Delta \ell' = \ell'_1 - \ell'_2$ entre les deux bras, où ℓ'_1 et ℓ'_2 sont respectivement les distances entre la séparatrice et le miroir des bras '1' et '2', un mouvement angulaire du faisceau $\tilde{\phi}$ autour d'un désalignement constant θ se traduit par un mouvement apparent des miroirs $\tilde{x} \approx \theta \tilde{\phi} \Delta \ell'$. Un alignement de la séparatrice de 10^{-7} rad sera possible, donnant une exigence de mouvement latéral $\tilde{y} \leq 10^{-12} \text{ m}\cdot\text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$. Un ajustement du $\Delta \ell'$ inférieur à 10^{-4} m et $\theta \leq 10^{-4}$ rad sera facile, donnant une limite sur le mouvement angulaire permis: $\tilde{\phi} \leq 10^{-11} \text{ rad}\cdot\text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$.

L'interféromètre 'extérieur' utilisant des lignes à retard devient sensible au mouvement du faisceau si la condition de ré-entrée n'est pas maintenue. Pour un mouvement transversal \tilde{y} du faisceau on a

$$\tilde{x} \approx N \frac{\Delta R}{R_0} \frac{y_0}{R_0} \cdot \tilde{y}$$

et pour un mouvement angulaire $\tilde{\phi}$ on trouve

$$\tilde{x} \approx N \frac{\Delta R}{R_0} y_0 \cdot \tilde{\phi}$$

où ΔR est l'erreur sur la longueur de la ligne à retard, R le rayon de courbure des miroirs, et y_0 le rayon du motif dessiné par des taches sur les miroirs. Le terme $\Delta R/R_0$ est au maximum égal au $\Delta\ell/\ell$ donné dans la discussion sur le bruit de fréquence, c'est à dire $\leq 10^{-3}$. Le motif des taches sera 0.3 m en rayon, donc on peut tolérer un mouvement transversal de $\tilde{y} \leq 3 \cdot 10^{-14} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$ et un mouvement angulaire de $\tilde{\phi} \leq 10^{-17} \text{ rad} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$. Notons que pour la sensibilité au mouvement angulaire on peut faire une asymétrie intentionnelle dans l'interféromètre 'intérieur' qui annule (au moins partiellement) la sensibilité venant de la ligne à retard.

On peut décrire la sensibilité des Fabry-Perot aux mouvements du faisceau, en termes d'une excitation par la lumière injectée dans la cavité des modes différents du mode fondamental TEM₀₀ désiré [Fattacioli'86]. La lumière réfléchie par les autres modes est déphasée par rapport au mode TEM₀₀, simulant un mouvement des miroirs. Pour la sensibilité au mouvement transversal on a :

$$\tilde{x} \approx \frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{\tilde{y}}{w} \right)^2;$$

et pour un mouvement angulaire, on a

$$\tilde{x} \approx \frac{\lambda}{4\pi} \frac{R\ell}{w^2} \tilde{\phi}^2$$

où $w = \sqrt{\lambda\ell/2\pi}$ est le rayon minimum du mode. Utilisant les chiffres ci-dessus, on trouve qu'un mouvement transversal $\tilde{y} \leq 2 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$ peut être toléré, et pour les mouvements angulaires $\tilde{\phi} \leq 9 \cdot 10^{-12} \text{ rad} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$.

Une méthode très efficace pour supprimer les mouvements de faisceau consiste à faire passer le faisceau à travers une fibre optique monomode. Seul le mode fondamental de la fibre, qui est presque gaussien TEM₀₀ ($\geq 99\%$), se propage sans pertes importantes, les autres modes ayant été réfléchis à l'entrée de la fibre ou atténués exponentiellement dans la gaine de la fibre. Donc, les mouvements (angulaires ou transversaux) du faisceau sont transformés en fluctuations de puissance, pour lesquelles nous avons une sensibilité petite et contre lesquelles on peut faire un asservissement si nécessaire.

Nous avons tenté de mesurer le mouvement résiduel après filtrage par une fibre monomode (voir la section *Fonctionnement de l'ensemble*), mais aucun mouvement supérieur au bruit de détection n'a été observé. La limite supérieure résultante est $\tilde{y} \leq 3 \cdot 10^{-12} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$ en position, et $\tilde{\phi} \leq 3 \cdot 10^{-12} \text{ rad} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$ en angle; en fait, le mouvement du faisceau mesuré après la fibre pourrait être beaucoup plus petit.

Cet limite supérieure suffit pour notre but si on profite de l'effet compensateur possible avec l'interféromètre 'intérieur'.

Sources de bruit d'origine mécanique

Bruit sismique: Pour des raisons de simplicité, nous donnons l'appellation 'sismique' à tous les mouvements de la terre dans les environs de l'interféromètre. En fait, il y a des sources naturelles (les microséismes, les vagues de la mer, les ruisseaux, le vent, etc.), et des sources humaines (activité industrielle, voitures, etc.). Il est souhaitable d'utiliser une classification différente: les sources locales, et les sources inévitables.

Pour minimiser les effets des sources locales, il faut choisir un site aussi éloigné que possible des activités humaines. Il n'est pas facile de trouver plusieurs kilomètres carrés qui ne soient pas utilisés pour l'agriculture et qui soient aussi assez plans. Les meilleures possibilités sont des sites existants pour la recherche (par exemple la radioastronomie, ou les accélérateurs hautes-énergies), ou des réserves militaires. On peut seulement espérer qu'un site sera disponible, où les bruits sismiques locaux sont du même ordre de grandeur que les bruits inévitables.

Plusieurs mesures de ce mouvement stochastique de la terre ont été faites; on trouve que le niveau change d'un ordre de grandeur si la mesure est faite près de la surface de la terre où les ondes Rayleigh sont excitées par le vent, etc., ou à une profondeur de 500 m où les ondes de compression ('body waves') dominent [Robertson'81]. Cependant, il apparaît en tout cas que la force excitatrice est 'blanche' en fréquence, donnant un mouvement bien caractérisé par une densité spectrale linéaire $\tilde{x} = K/f^2 \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$. Pour les sites de surface typiques (Nançay, France; plusieurs sites en Allemagne; Gargunnock, Ecosse), K a une valeur à peu près $3 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{Hz}^2$. Ceci donne un niveau de bruit à 100 Hz de $3 \cdot 10^{-12} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$. Donc, il serait désirable d'avoir un système d'isolation sismique qui donne un facteur d'isolation de $3 \cdot 10^8$ autour de 100 Hz. Un tel système, basé sur l'effet de filtrage d'un pendule, est décrit en détail dans la section *Systèmes d'isolation sismique*. Notons que le problème devient beaucoup plus difficile si on veut mesurer des ondes gravitationnelles de fréquences plus basses, parce que le bruit sismique devient plus grand, et de plus l'isolation du pendule devient plus mauvaise.

Bruit thermique: Chaque mode d'un système mécanique résonnant a une énergie $\frac{1}{2} k_B T$. Cette énergie produit une excitation statistique du mode, et la densité

spectrale linéaire du mouvement $\tilde{x}(\omega)$ dépend de la fréquence f_0 (où $\omega_0 = 2\pi f_0$), du coefficient de qualité Q , et de la masse m du mode résonnant [Callen'51] :

$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{4k_B T}{m Q \omega_0^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Il est utile de distinguer trois régimes en fonction de la fréquence : au-dessus de la fréquence de résonance ω_0 , l'amplitude moyenne décroît en $1/\omega^2$:

$$\tilde{x} = \sqrt{4k_B T \omega_0 / m Q \omega^4};$$

à la résonance, on obtient

$$\tilde{x} = \sqrt{4k_B T Q / m \omega_0^3};$$

en-dessous de la résonance il y a un niveau moyen indépendant de la fréquence :

$$\tilde{x} = \sqrt{4k_B T / m Q \omega_0^3}.$$

Les composants les plus sensibles au bruit thermique dans les détecteurs interférométriques sont les masses-test. Les surfaces réfléchissantes sont soit sur les masses-test, soit solidaires des masses-test. Donc leur mouvement est déterminé par celui des masses-test. Il y a deux systèmes résonnats qui sont pertinents : les modes propres des masses-test et le mode pendulaire du système d'isolation sismique. Les masses-test doivent avoir un diamètre compris entre 30 cm (Fabry-Perot) et 80 cm (ligne à retard) pour loger la surface réfléchissante. La fréquence de résonance fondamentale pour une masse-test de forme cylindrique est à peu près maximisée quand l'épaisseur est égale au diamètre [Hutchinson'80]; dans ce cas-là, la fréquence de résonance la plus basse peut être estimée à $\omega_0 \approx \pi v_S / D$, où v_S est la vitesse transversale du matériau et D le diamètre de la masse-test. La fréquence de cette première résonance de la masse-test sera à peu près 5 kHz (plus élevée que les fréquences caractéristiques des ondes gravitationnelles) et c'est le régime en-dessous la résonance qui nous intéresse. Dans ce cas là, on peut réécrire la densité spectrale linéaire de mouvement sous une forme indépendante de la grandeur du miroir :

$$\tilde{x} \approx \sqrt{\frac{4k_B T}{\pi^3 \rho v_S^3 Q}}$$

Pour minimiser ce bruit, on peut baisser la température T , mais on ne gagne beaucoup qu'avec les températures cryogéniques, et les difficultés techniques de maintenir les miroirs, sous vide, avec une puissance lumineuse d'un kilowatt sur la surface, à plusieurs degrés Kelvin apparaissent formidables. Donc, on essaie de maximiser les variables ρ , v_s , et Q .

La matériau de la masse-test sera probablement la silice, qui a les caractéristiques suivantes : une densité $\rho \approx 2.5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, une vitesse transverse $v_s \approx 5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, et une surtension de cisaillement $Q \approx 10^5$. Le mouvement résultant est $\tilde{x} \approx 8 \cdot 10^{-21} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$. En fait, les mouvements thermiques des quatre masses-test sont indépendants et s'ajoutent en quadrature; en plus, nous avons tenu compte seulement de la résonance la plus basse, et les autres contribuent aussi (avec une amplitude plus petite car ω_n est plus grand). Ce bruit donne finalement un niveau d'à peu près $\tilde{x} \approx 2 \cdot 10^{-20} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$.

Le bruit thermique venant du mode pendulaire du système d'isolation sismique est important dans le régime au-dessus de la fréquence de résonance, donc le niveau de bruit thermique décroît comme le carré de la fréquence. La surtension Q est limitée par les pertes, dans les fils supports et le point de suspension, et est probablement une fonction croissante de la fréquence. On a mesuré les surtensions à la fréquence de la résonance dans les pendules tests de quelque 10^6 . Avec les autres valeurs typiques de la fréquence de résonance $\omega_0 = 2\pi \cdot 0.5 \text{ Hz}$, et la masse des masses-test $m = 500 \text{ kg}$, on trouve (pour la somme en quadrature des quatre masses-test) une densité spectrale linéaire de $\tilde{x} = 5 \cdot 10^{-16} / f^2 \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$. Ce bruit-ci est plus petit que la sensibilité désirée au-dessus de à peu près 70 Hz.

Autres bruits : On peut mentionner plusieurs autres sources de bruit, bien qu'elles soient négligeables par rapport aux précédentes. Les champs électriques sont faciles à blinder à un niveau très bas. Les champs magnétiques venant du secteur doivent être évités (les transformateurs et les alimentations loin des masses-test); les champs inévitables produisent des mouvements négligeables. Les gradients variables dans le champ 'statique' gravitationnel, venant des changements de position des masses proches, par exemple les avions, les nuages, les expérimentateurs, etc., produisent aussi des mouvements des masses-test beaucoup plus petits que la sensibilité de l'antenne canonique [Saulson'84]. De la même façon, les rayons cosmiques déposent des énergies négligeables dans les masses-test pour les fréquences plus hautes que quelque 50 Hz [Lindsay'83].

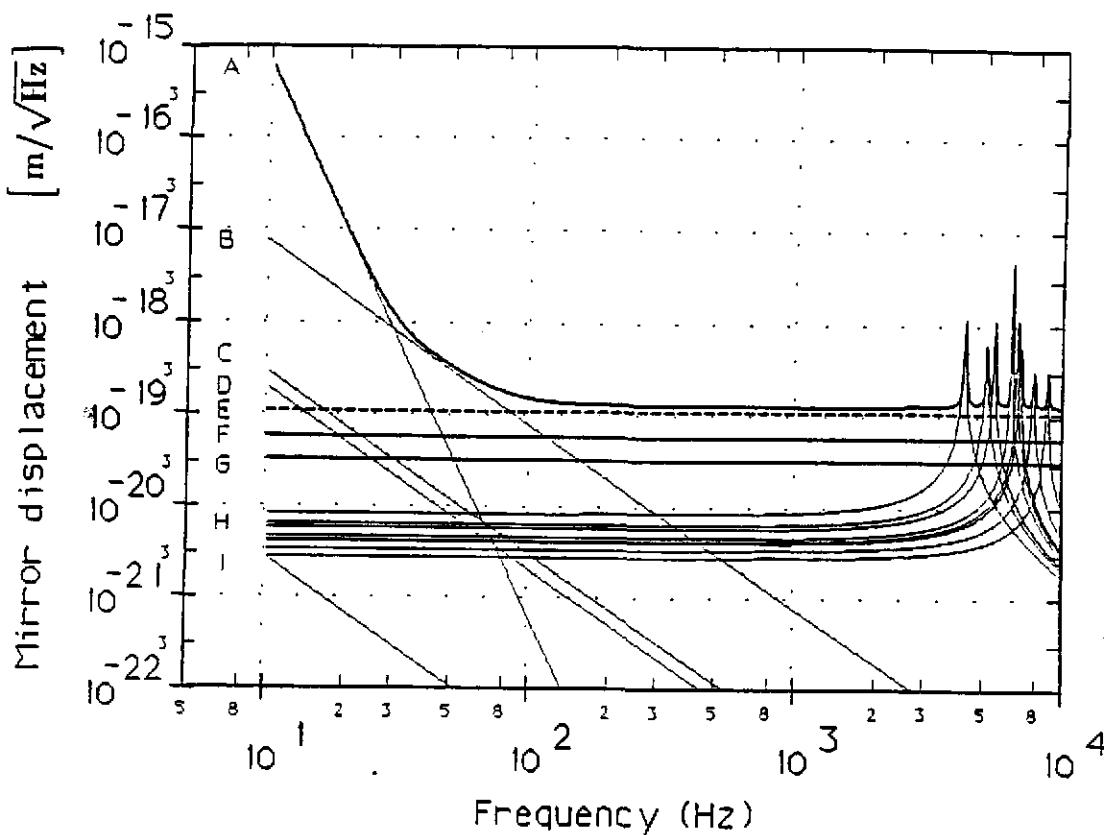


Figure 1C1: Influence des sources de bruit, calculée pour le cas de l'antenne 'canonique' avec les lignes à retard. A : sismique, B : excitation thermique du pendule, C : diffusion sur les parois, D : fluctuations de puissance, E : grenade, F : fluctuations d'indice du gaz résiduel, G : fluctuations de la fréquence laser, H : excitation thermique des modes propres de la masse-test, I : pression de radiation

Conclusion

Cette revue des sources de bruit prévues a montré qu'une sensibilité suffisante ($\tilde{x} = 10^{-18} \text{ m}\cdot\text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$, correspondant à une amplitude $\tilde{h} = 3 \cdot 10^{-23} \text{ Hz}^{-\frac{1}{2}}$) dans une bande de fréquence d'intérêt astrophysique (entre 100 Hz et 5 kHz) devrait être à notre portée, bien que des progrès en plusieurs domaines (laser, fabrication de miroirs, isolation sismique, matériaux de grande surtension intrinséque) soient d'abord nécessaires. La figure 1C1 est une représentation graphique des bruits divers calculés pour l'interféromètre 'canonique', en fonction de la fréquence, qui permet

48 *Conclusion*

de visualiser l'influence des diverses sources de bruit dans les régimes différents. Il est encourageant que l'analyse des bruits produits par les maquettes (voir la section *Fonctionnement de l'ensemble*) confirme quantitativement un grand nombre des modèles ci-dessus.

Partie 2 : Solutions particulières réalisées

2A) Détection de signal

La conversion d'un changement d'intensité de la lumière (causé par une onde gravitationnelle) en un signal électrique est une fonction importante d'un détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles. Il faut le faire d'une façon qui compromette le moins possible la sensibilité. Pour justifier le système utilisé, on va discuter brièvement une alternative; puis, nous allons clarifier l'asservissement, et discuter en plus de détails les travaux que nous avons fait sur l'influence des imperfections des composants du système, puis la dépendance du bruit en fonction des paramètres de la détection.

Un système très simple se compose d'une seule photodiode, placée à la sortie A de l'interféromètre opposée à la source de lumière (voir la figure 2A1). Prenons une source laser sans fluctuations de puissance. Pour le courant dans la photodiode I_{pd} on a

$$I_{pd} = I_{min} + \frac{I_{max} - I_{min}}{2} (1 - \cos \phi)$$

où I_{min} et I_{max} sont les courants maximum et minimum et $\phi = 2\pi\Delta L/\lambda$, où ΔL est la différence de marche entre les bras. La limite de sensibilité ϕ_{ls} est déterminée par les fluctuations du photocourant $i = \sqrt{2eI_{pd}}$ à cause du bruit de grenaille:

$$\phi_{ls} = \frac{2\pi\Delta L_{ls}}{\lambda} = \frac{\sqrt{2e [I_{min} + \frac{1}{2}(I_{max} - I_{min})(1 - \cos \phi)]}}{\frac{1}{2}(I_{max} - I_{min}) \sin \phi}$$

Dans la limite où I_{min} tend vers 0, le point d'opération optimal tend vers $\phi = 0$ (la frange noire), et le rapport signal/bruit ($\equiv S/B$) approche $\sqrt{2e/I_{max}}$; c'est la meilleure sensibilité possible étant donné le photocourant disponible. Un problème sérieux avec ce système de détection est qu'on a une sensibilité directe au bruit de puissance de la source de lumière.

Une alternative consiste à prendre la différence du photocourant des deux photodiodes, une sur chaque sortie A, B de l'interféromètre. Dans ce cas-ci, le point d'opération optimal est sur la mi-frange $(I_{max} - I_{min})/2$ ($\phi = \pi/2$), et le rapport S/B est encore $\sqrt{2e/I_{max}}$. Le signal en fonction de la différence de phase ϕ varie en sens contraire sur les deux photodiodes; mais les fluctuations de puissance

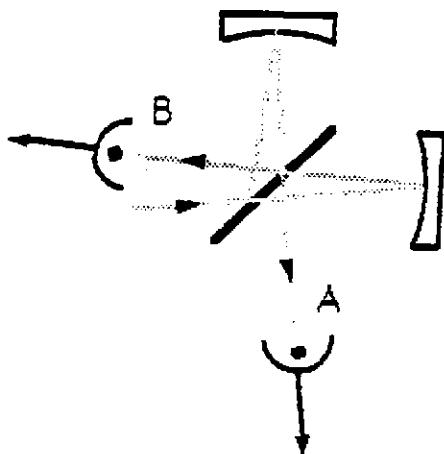


Figure 2A1 : Système de détection en continu

causent les variations du photocourant en mode commun. Dans la mesure où les réponses des diodes sont identiques, et dans la mesure où la différence précise des signaux est disponible, le bruit de puissance du laser est supprimé.

Les difficultés pratiques avec les photodiodes sont par exemple le fait que l'efficacité quantique varie avec la position du faisceau sur la surface, donnant une sensibilité aux mouvements relatifs entre les faisceaux et les photodiodes, mais également des différences de réponse en amplitude et en phase inévitables. Le circuit qui forme la différence a un rapport de réjection de mode commun fini. Pour les sources lasers réalistes, on ne peut pas faire une mesure qui est limitée par le bruit de photons aux fréquences d'intérêt.

Un système préférable est décrit dans la section *Fonctionnement de l'ensemble*. Dans ce schéma, l'interféromètre est maintenu sur la frange sombre par un asservissement, et les déviations par rapport à ce point sont détectées par un système de modulation-démodulation [Weiss '72]. Le fait que l'interféromètre soit interrogé à 10 MHz évite le problème du bruit d'intensité; les changements d'intensité aux fréquences basses ne modifient que le gain de l'asservissement.

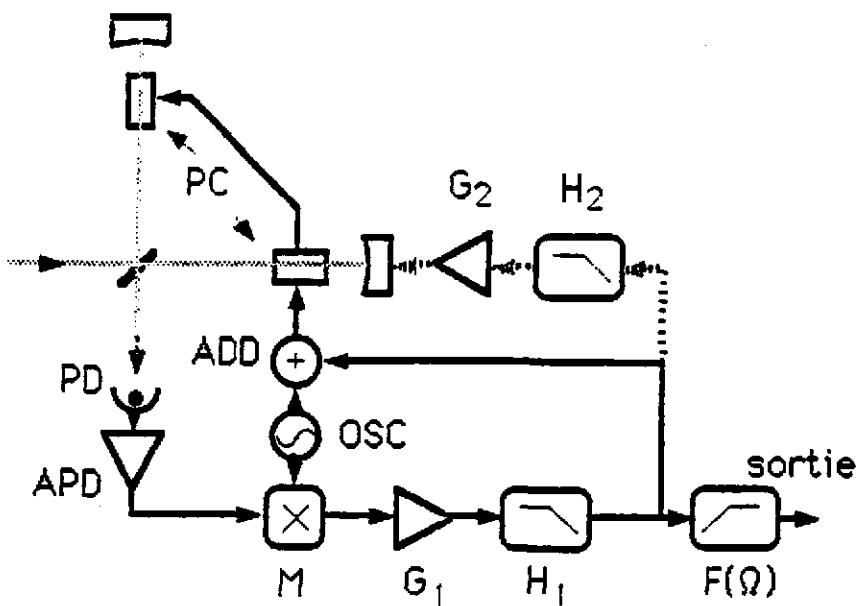


Figure 2A2 : Système d'asservissement pour l'interféromètre

La boucle d'asservissement

La figure 2A2 montre le système d'asservissement. La lumière dans l'interféromètre reçoit des cellules de Pockels PC une modulation en phase, différentielle dans les deux bras, à une fréquence de 10 MHz. Le photocourant, proportionnel à la lumière tombant sur la photodiode PD, est converti en tension par l'amplificateur de photodiode APD. Le mélangeur M, qui est contrôlé par le même générateur Osc à 10 MHz que les cellules de Pockels, donne un signal, autour de la frange sombre, qui est proportionnel au déplacement de l'interféromètre par rapport à la frange sombre. Appelons R (V/A) le gain total de l'ensemble photodiode-amplificateur-mélangeur et B ($V \cdot Hz^{-\frac{1}{2}}$) le bruit de mesure rapporté à son niveau à l'entrée de la photodiode. Un amplificateur G_1 de gain G et un intégrateur $H_1(\omega)$ suivent. Le canal signal sort vers un filtre passe-haut $F(\omega)$. Le signal d'asservissement est sommé avec la modulation haute-fréquence (Add), et appliquée aux cellules de Pockels qui montrent un coefficient de V_λ volts pour un changement de la différence de marche d'une longueur d'onde. La lumière, caractérisée par le photocourant I_{pd} et une efficacité de détection α sans dimension qui dépend du taux de modulation et des conditions interférométriques, ferme la

boucle; la forme exacte de α est développée dans la section *Fonctionnement de l'ensemble*.

Ignorant pour le moment la boucle en ligne pointillée nous pouvons écrire le signal S attendu à la sortie S :

$$S = (xI_{pd}\alpha + B)RG_1H_1(\omega)F(\omega) - S \cdot RG_1H_1(\omega)\frac{I_{pd}\alpha}{V_\lambda}$$

soit

$$S = \frac{(xI_{pd}\alpha + B)RG_1H_1(\omega)F(\omega)}{1 + RG_1H_1(\omega)\frac{I_{pd}\alpha}{V_\lambda}} .$$

Si le gain G est tel que

$$\frac{I_{pd}\alpha RG_1H_1(\omega)}{V_\lambda} \gg 1$$

pour les fréquences d'intérêt (disons 10 kHz), on a:

$$S \approx x \cdot F(\omega)V_\lambda + \frac{B}{I_{pd}\alpha} \cdot F(\omega)V_\lambda .$$

Le filtre $F(\omega)$ sert à rejeter tous les signaux de fréquence plus basse que ω_F , qui contiennent seulement les gros mouvements induits par le bruit sismique, et à fournir un gain constant pour les fréquences plus hautes. Donc, pour les fréquences d'intérêt, le signal S est donné en termes de la sensibilité des cellules de Pockels. Notons que le photocourant I_{pd} n'entre pas dans cet expression, donc n'est pas une source possible de bruit dans la limite de gain de boucle élevé.

La boucle en trait pointillé exerce les forces magnétiques sur les masses-test aux fréquences basses pour réduire la gamme dynamique sur les cellules de Pockels.

Le bruit B a deux composantes: 1) Le bruit de grenaille B_b , qui est proportionnel à la racine du photocourant, $B_b = \sqrt{2eI_{pd}}$; et 2) Le bruit électronique B_e , soit de la photodiode, soit de l'amplificateur, qui est constant. Les deux étant des processus aléatoires indépendants, s'ajoutent en quadrature:

$$S = \left[x + \sqrt{\left(\frac{2e}{I_{pd}} + \frac{B_e^2}{I_0^2} \right)} \right] F(\omega)V_\lambda .$$

Cette représentation montre nettement le fait que par rapport à la sensibilité aux mouvements des miroirs, le bruit de grenaille varie comme l'inverse de la racine de l'intensité de la lumière, alors que l'influence du bruit électronique varie linéairement avec l'intensité.

La photodiode

Le premier élément dans le système de détection est la photodiode. On souhaite une grande efficacité quantique η ,

$$\eta \equiv \frac{I_{pd}/e}{dN_{ph}/dt} = \frac{I_{pd}}{P} \cdot \frac{h\nu}{e},$$

pour que le rapport signal-bruit S/B possible après la diode (limité par la statistique Poisson dans le photocourant $I_{pd} = e \cdot dN_e/dt$) ne soit pas compromis sérieusement. Pour une longueur d'onde spécifique, on peut optimiser le type de semi-conducteur, l'épaisseur du semi-conducteur, et le niveau de dopage.

En plus, il faut minimiser la lumière réfléchie à la surface du semi-conducteur à cause de la différence d'indice optique entre le semi-conducteur et l'air ou le vide qui précède la photodiode dans le chemin optique. Deux moyens se présentent pour ce faire: un traitement anti-réfléchissant sur la surface de la diode devrait être possible, mais il n'est pas pratique dans un sens économique pour la faible quantité de diodes exigées. Une alternative que nous avons proposée, est de placer la photodiode à l'angle de Brewster pour le matériau semiconducteur de façon à ce que la polarisation correcte soit absorbée.

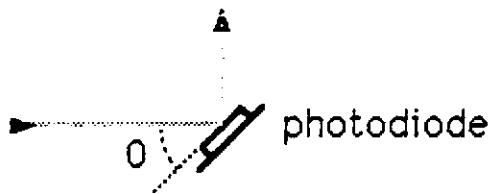


Figure 2A3 : Arrangement expérimental pour la mesure du photocourant en fonction de l'angle

Pour tester cette idée, nous avons mesuré le photocourant d'une photodiode silicium de type *DT110*, fabriquée par EG&G, en fonction de l'angle et de la polarisation de la lumière incidente (pour $\lambda = 514 \text{ nm}$). Voir la figure 2A3. La théorie électromagnétique [Born'75] donne, pour les intensités de lumière de polarisation perpendiculaire I_{\perp} (ou 'Senkrecht') et parallèle I_{\parallel} qui entre dans le

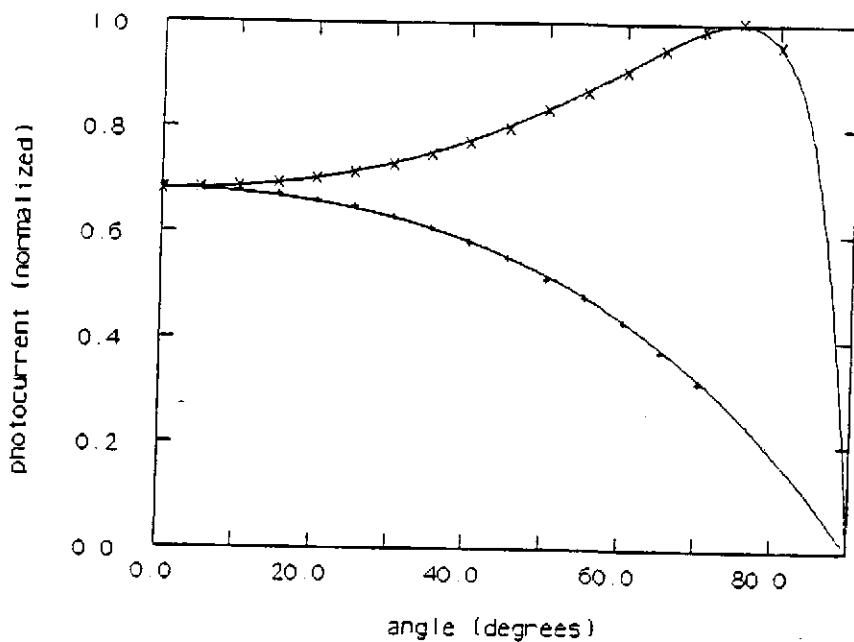


Figure 2A4 : Photocourant en fonction de l'angle incident pour les deux polarisations

corps de la diode en fonction de l'angle θ_i indiqué sur la figure, et l'angle θ_t de la lumière transmise :

$$I_{\perp} = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}$$

$$I_{\parallel} = I_{\perp} \cdot \frac{1}{\cos^2(\theta_i - \theta_t)}$$

où

$$\sin \theta_t = \frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i$$

Les résultats expérimentaux sont donnés dans la figure 2A4, avec la courbe théorique calculée pour $n_t = 3.61$. Pour comparer la théorie et l'expérience, nous avons ajusté le coefficient de la lumière absorbée sous incidence normale sur la courbe théorique, de façon à ce qu'elle soit égale à la courbe expérimentale. La lumière réfléchie tombe de 31% (incidence normale) à moins de 2%. A l'angle de Brewster, nous avons vu un taux de conversion d'à peu près 0.35 A/W, ou autrement dit, nous avons obtenu une efficacité quantique égale à peu près à 84% pour $\lambda = 514$ nm.

D'autres paramètres de la photodiode, la rapidité et la linéarité de réponse, et la résistance aux puissances importantes, sont liés. La photodiode est utilisée avec une polarisation inverse V_{pd} pour maintenir la linéarité et pour réduire sa capacité. La puissance dissipée dans la photodiode est la somme de la puissance venant directement de la lumière (à peu près $(1 - \eta) \cdot P$), et de la puissance dissipée à cause du photocourant ($I_{pd} \cdot V_{pd}$); c'est ce dernier qui domine. Avec le système d'asservissement employé dans la maquette du Max-Planck-Institut à Garching, la sortie 'mesure' de l'interféromètre est maintenue sur la frange sombre. Mais, comme nous le verrons plus tard, pour les visibilités réalistes des franges d'interférence, un taux de modulation haute-fréquence aboutissant à une intensité sur la frange sombre de quelque 5% de la lumière d'entrée est optimal, c'est à dire de l'ordre de 50 mw pour une puissance laser de 1 W; cela correspond à une dissipation électrique d'à peu près 2.5 W pour une polarisation $V_{pd} = 150$ V.

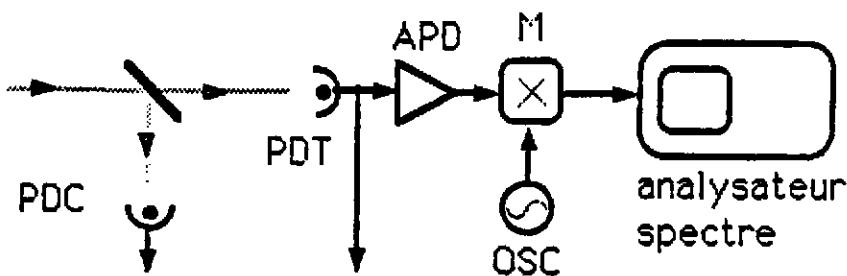


Figure 2A5 : Arrangement expérimental pour la mesure de la linéarité de la photodiode et de l'amplificateur

Nous avons mesuré la linéarité de la photodiode DT110 (et de l'amplificateur qui suit) avec l'arrangement simple qui est montré dans la figure 2A5. Une partie de la lumière du laser Argon tombe sur une photodiode de contrôle PDC, et la plupart sur la photodiode en test PDT. On mesure les deux photocourants, et aussi le bruit autour de 10 MHz qui sort de la photodiode en test. La haute fréquence assure que le bruit du laser est limité par le bruit de photons. La courbe 2A6 montre que le photocourant en continu reste bien linéaire avec la puissance incidente jusqu'à à peu près 20 mA de photocourant (correspondant à 3 W dissipés dans la diode); pour les intensités plus fortes, le courant monte plus rapidement que linéairement. La courbe 2A7 indique que ce bruit étant un bruit de grenaille, croît avec la racine du courant jusqu'à 20 mA; ensuite, il croît plus lentement qu'attendu. Ces effets sont probablement dus au chauffage de la jonction semi-conducteur.

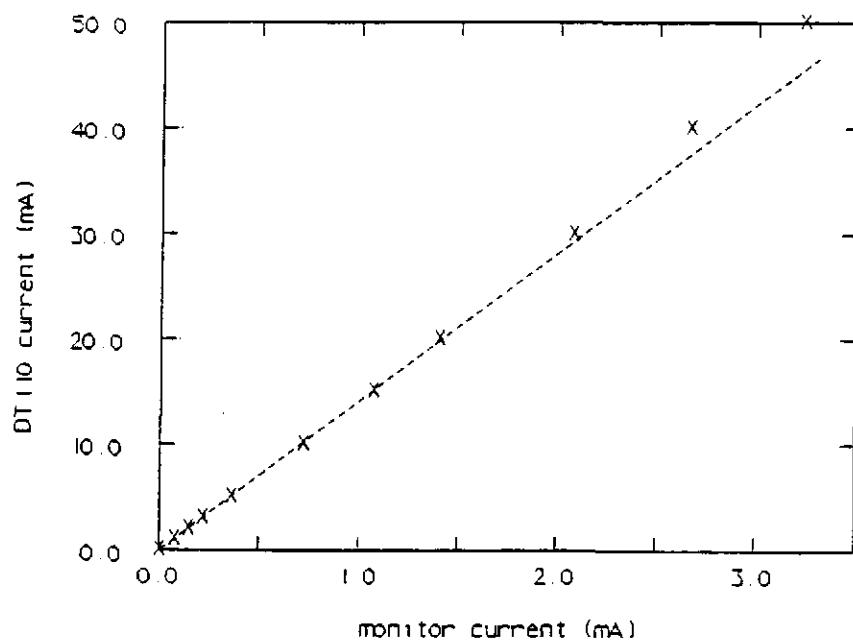


Figure 2A6 : Linéarité de l'ensemble photodiode-amplificateur

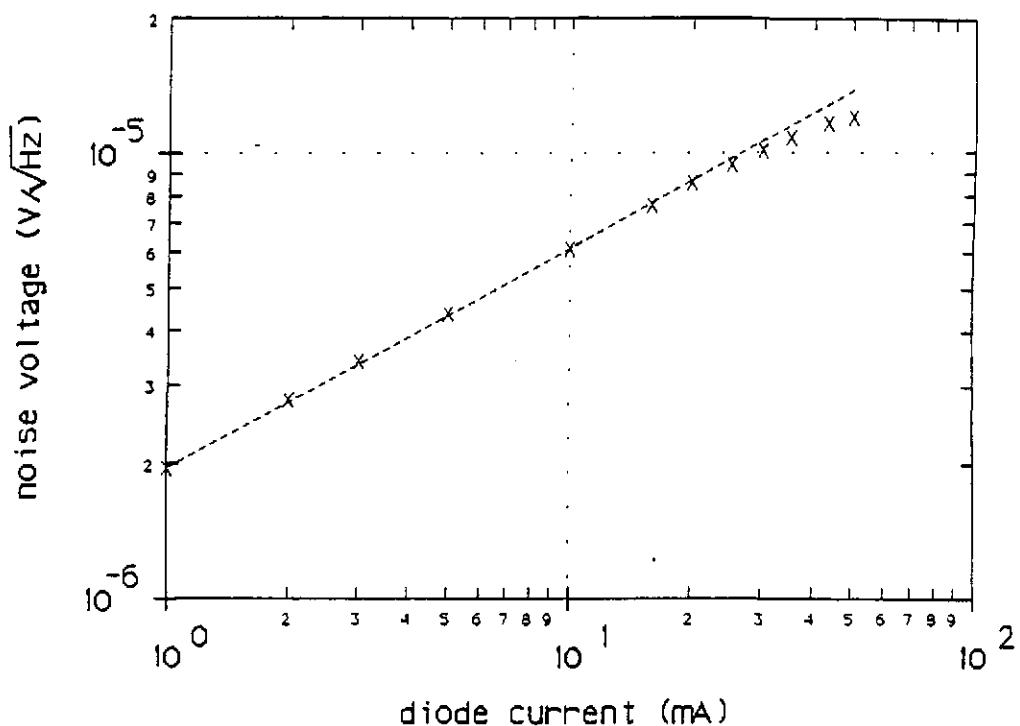


Figure 2A7: Bruit de grenaille en fonction du courant pour l'ensemble photodiode-amplificateur

La linéarité est une mesure importante du système photodiode-amplificateur. Si on a un terme parabolique dans la réponse, par exemple $V_s = P_{inc} + \beta P_{inc}^2$ (avec $\beta \ll 1$), le bruit de puissance aux basses fréquences sera transformé aux fréquences autour de la fréquence de modulation. On peut écrire $P_{inc}^2 = (P_{b.f.} + P_{h.f.})^2$, où les deux termes représentent la puissance aux basses et hautes fréquences. C'est le terme en $P_{b.f.} \times P_{h.f.}$ qui nous gêne. Notons qu'une façon de diagnostiquer ce bruit parasite est de changer le taux de modulation haute-fréquence; on attend un changement linéaire du niveau du bruit à cause de ce phénomène, et en général un changement moins rapide pour les autres effets (voir la section *Fonctionnement de l'ensemble*).

L'amplificateur de photodiode

Le prochain élément critique dans la chaîne de détection est l'amplificateur suivant la photodiode. On voudrait être limité dans la mesure par le bruit de grenaille dans le photocourant. En fait, on a aussi la tension due aux bruits thermiques où 'bruit Johnson' dans les résistances (égale à $V = \sqrt{4kTR}$, où k est la constante de Boltzmann, T la température absolue, et R la résistance; V a les unités de $\text{V}\cdot\text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$) et au bruit dans le premier étage électronique. Un modèle pour l'étude du bruit est montré dans le figure 2A8. Le bruit de grenaille $i_g = \sqrt{2eI_{pd}}$ est produit en parallèle avec la capacité de la photodiode C_{pd} . Il y a une résistance R_{pd} en série, qui est une combinaison de la résistance du semi-conducteur et des résistances de contact, qui produit son propre bruit thermique e_{pd} . La résistance de charge R_1 fait un bruit V_1 , et enfin nous avons des bruits en tension et en courant de l'amplificateur e_a , i_a . On peut écrire pour chacune des sources le bruit en tension résultant à l'entrée de l'amplificateur.

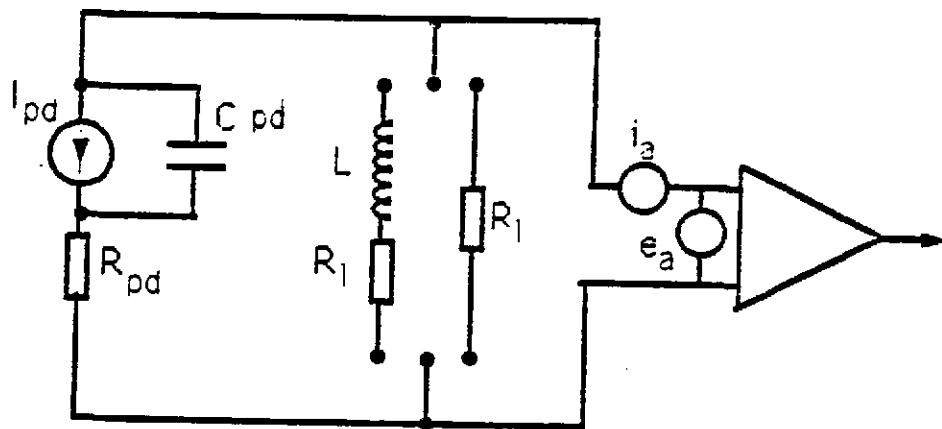


Figure 2A8 : Modèle de bruit de la photodiode et de l'amplificateur

Un concept qui permet de mieux comprendre les formules résultantes est celui du 'courant de bruit effectif' : on se demande quel serait le courant dont le bruit de grenaille serait équivalent à chacun des termes de bruit. Puis, on peut comparer le résultat directement avec le photocourant qu'on veut mesurer. Dans la figure 2A9 sont montrés les courants de bruit effectif pour des valeurs typiques des

circuits réalisables. La somme de tous les bruits est aussi indiquée. On voit que le meilleur résultat est obtenu avec une résistance de charge grande, mais que le photocourant le plus petit qu'on puisse mesurer est à peu près 0.3 mA (en fait, pour que la mesure ne soit pas sérieusement affectée par les bruits, le photocourant devrait être de l'ordre de 1.0 mA).

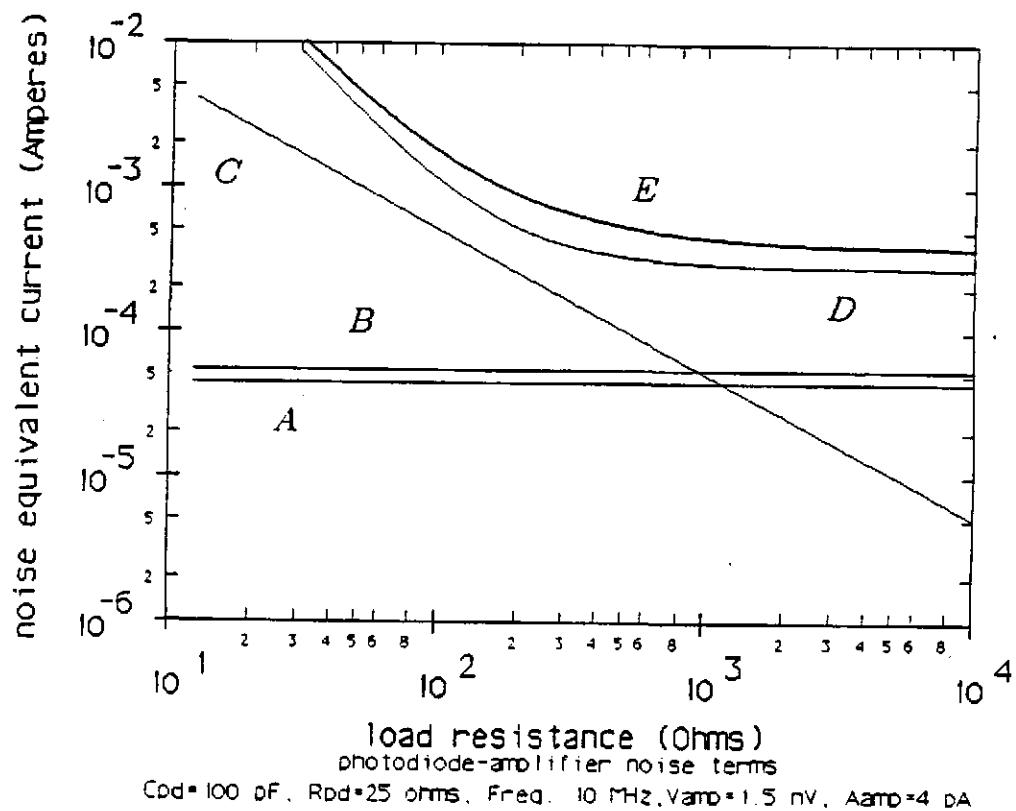


Figure 2A9: Bruits de l'ensemble photodiode-amplificateur, avec une charge de résistance, en fonction de la résistance. A : amplificateur i_a , B : photodiode thermique R_{pd} , C : charge thermique R_t , D : amplificateur e_a , E : somme quadratique de tous les bruits

62 L'amplificateur de photodiode

Un autre schéma possible emploie une self d'inductance L comme 'résistance de charge'. L'avantage est que la self se comporte comme une impédance à très faible perte, donc à faible bruit Johnson. On choisit une self telle que la capacité de la photodiode et l'inductance de la self créent un circuit résonnant à la fréquence de modulation (à haute fréquence). On ne veut pas que la surtension de ce circuit soit grande, parce que cela donnerait une sensibilité indésirable aux petits changements de valeurs des composants électroniques. En fait, les pertes (ici signifiées par R_l) typiques dans les selfs autour de 10 MHz limitent assez bien la surtension. Pour référence, nous donnons les bruits en tension à l'entrée de l'amplificateur pour ce schéma. Pour le bruit de grenaille, nous avons

$$V[i_g] = \sqrt{2eI_{pd}} \cdot \left[\frac{R_l^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 C_{pd}^2 (R_l + R_{pd})^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2} \right]^{1/2}$$

pour le bruit de la résistance interne de la photodiode,

$$V[e_{pd}] = \sqrt{4kTR_{pd}} \cdot \left[\frac{R_l^2 + \omega^2 L^2}{(R_l + R_{pd})^2 + \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right]^{1/2};$$

pour le bruit de la résistance de la self,

$$V[V_{R_l}] = \sqrt{4kTR_l} \cdot \left[\frac{1 + (\omega C_{pd} R_{pd})^2}{\omega^2 C_{pd}^2 (R_l + R_{pd})^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2} \right]^{1/2}$$

Le bruit en tension de l'amplificateur paraît directement :

$$V[e_a] = e_a,$$

et le bruit en courant sur l'impédance du circuit photodétecteur :

$$V[i_a] = i_a \cdot \left[\frac{(R_l R_{pd})^2 + \left(\frac{L}{C_{pd}}\right)^2 + \left(\frac{L}{\omega}\right)^2 (R_l \omega_0^2 - R_{pd} \omega^2)^2}{(R_l + R_{pd})^2 + \left(\frac{L}{C_{pd}}\right)^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right]^{1/2};$$

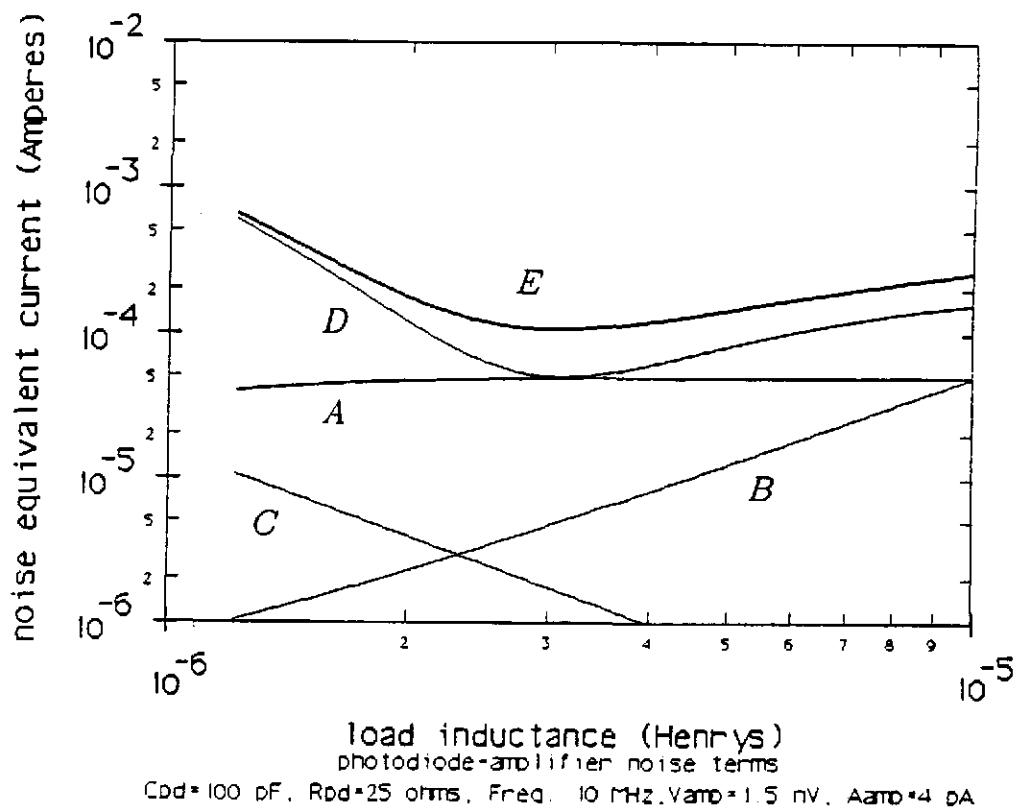


Figure 2A10: Bruits de l'ensemble photodiode-amplificateur, avec une charge d'inductance, en fonction de l'inductance. A : amplificateur i_a , B : photodiode thermique R_{pd} , C : charge thermique R_t , D : amplificateur e_a , E : somme quadratique de tous les bruits

La figure 2A10 montre la performance possible avec ce circuit photodiode.

Nous avons construit les deux types de circuits; un amplificateur représentatif est montré dans la figure 2A11. L'impédance de charge Z_1 peut être une résistance ou une inductance. Le signal radio-fréquence (à 10 MHz) est amplifié par le transistor Q_1 , dans une configuration en émetteur commun avec une capacité découplageur C_1 . Un filtre passe-haut FPH de type Chebychev élimine l'excès de bruit aux basses fréquences ($\leq 1 \text{ MHz}$), et un amplificateur émetteur-suiveur ES présente une impédance d'attaque haute pour que le gain effectif du premier amplificateur ne soit pas réduit. Plusieurs étages d'amplification suivent. Notons

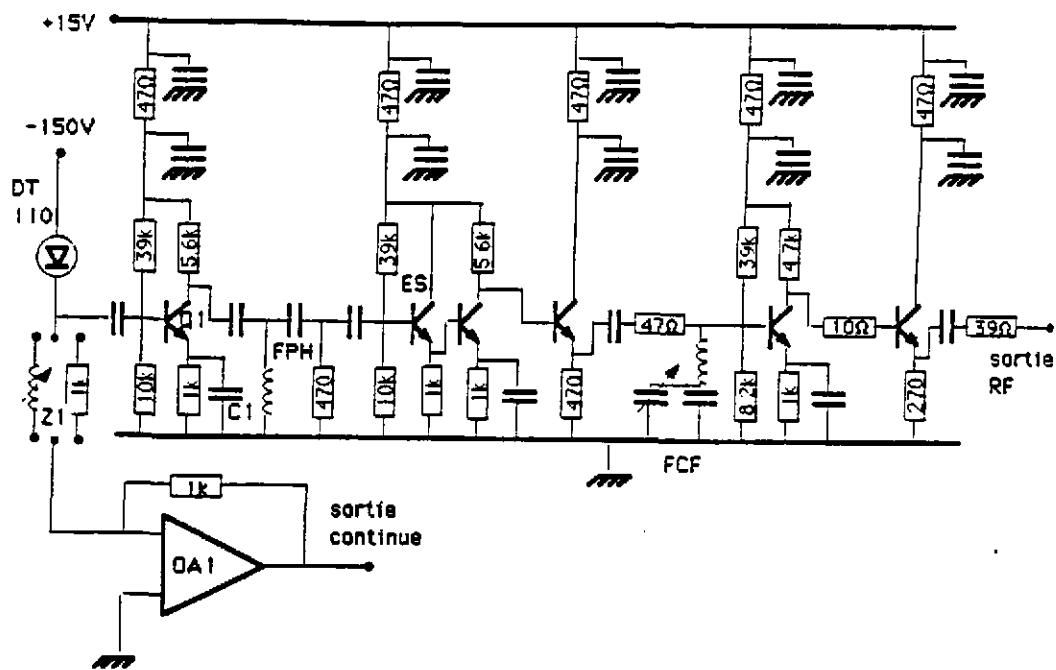


Figure 2A11: Amplificateur de la photodiode

le filtre coupe-fréquence FCF qui élimine la première harmonique de la fréquence de la modulation (20 MHz). Le photocourant aux basses fréquences est converti en tension par l'amplificateur opérationnel OA1 fournissant une mesure de l'intensité de la lumière en continu. Les caractéristiques mesurées de cet amplificateur, ainsi que les caractéristiques de la photodiode EG&G DT110, sont utilisées pour les courbes 2A9 et 2A10: un bruit de courant $i_a = 4 \text{ pA}$, un bruit de tension $e_a = 1.5 \text{ nV}$, une capacité et une résistance interne de la photodiode de $C_{pd} = 100 \text{ pF}$ et $R_{pd} = 25 \Omega$, tous évalués à une radio-fréquence de 10 MHz. La résistance de l'inducteur, dans le cas d'une inductance de charge, est 50Ω .

Nous avons vu que la dépendance du bruit en fonction de la résistance (figure 2A9) est correcte: le courant de bruit effectif devient plus petit avec une augmentation de la résistance de charge, mais aucune amélioration importante n'est vue pour les résistances plus grandes qu'à peu près $R_i \approx 1 \text{ k}\Omega$. Avec $R_i = 1 \text{ k}\Omega$,

le bruit effectif en courant est de $5 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$. Utilisant une inductance variable comme charge, nous avons vu un net minimum de bruit effectif quand le circuit d'entrée est accordé avec la fréquence de modulation. Le minimum est de $1.5 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$.

Enfin, on peut noter qu'entre le plus petit courant qu'on peut mesurer sans que cette mesure soit trop compromise par le bruit de l'amplificateur, et le plus grand courant pour lequel la photodiode reste linéaire, on a un facteur de l'ordre de dix; ce qui est peu.

Les cellules de Pockels

Les autres transducteurs dans le système de détection sont les cellules de Pockels. Elles fonctionnent par effet électro-optique, où un changement dans le champ électrique sur un cristal cause un changement de son indice optique. En plus, tous les cristaux qui montrent l'effet électro-optique doivent, par raison de symétrie des cristaux, montrer aussi l'effet piezo-électrique, c'est à dire un changement de volume avec un champ électrique, et l'effet photo-élastique, c'est à dire une sensibilité de l'indice optique à l'application d'une contrainte [Nye'60].

Il y a deux moyens par lesquels cette complication peut compromettre la mesure: en produisant une non-linéarité, ou en amplifiant le bruit thermique. La première crainte est survenue en connection avec la question de calibration: on a remarqué ci-dessus que c'est la sensibilité V_λ qui donne la connection entre le signal électrique et le mouvement des miroirs. Un moyen de mesurer cette quantité est de faire sauter la tension sur les modulateurs V_{cp} afin que la longueur optique change exactement d'une frange; c'est un critère facile à appliquer, car si on a choisi la tension correcte, on n'observe aucun changement dans l'intensité de la lumière qui tombe sur la photodiode. Mais en fonctionnement, l'interféromètre mesure typiquement 10^{-9} frange, et on ne peut pas être sûr que la même tension pour un changement de chemin optique donné V/λ s'applique. Nous avons fait deux contrôles: pour vérifier la linéarité simple, il suffit de faire la mesure de la tension nécessaire pour sauter deux franges. Si on écrit

$$\Delta L = V_{cp} + \beta V_{cp}^2,$$

on voit qu'on peut déduire la valeur de β (ou mettre une limite supérieure sur sa grandeur) avec deux mesures à des tensions différentes.

Un interféromètre simple a été construit à Garching, avec une cellule de Pockels de type *Gsänger PM-25* dans chacun des bras, et la tension nécessaire pour faire des sauts de une et deux franges ($\lambda = 514 \text{ nm}$) a été mesurée. Les valeurs moyennées sont $472.6 \pm 2 \text{ V}$ pour une frange, et $948.4 \pm 5 \text{ V}$ (474.2×2) pour deux franges. On calcule $\beta = 1.4 \cdot 10^{-5}$; entre une frange et 10^{-9} frange on attend un changement de sensibilité de 0.7 %, moins que notre erreur aléatoire de mesure.

Un deuxième test est fait avec le servo-système qui maintient l'intensité de la sortie de l'interféromètre sur la frange noire, avec un gain très petit afin qu'il ne puisse pas corriger dans le domaine des fréquences de mesure, mais suffisant pour tenir l'interféromètre sur la frange noire en moyenne. On applique un signal sinusoïdal d'amplitude connue sur les cellules de Pockels, et on observe le signal sur la sortie du mélangeur. Par comparaison avec l'amplitude crête à crête des franges d'interférence ($I_{\max} - I_{\min}$), on peut calculer le changement de longueur optique qui correspond à cette modulation. Donc, on arrive encore à une valeur pour V_λ ; on peut faire cette mesure pour différentes valeurs des amplitudes de modulation. Le résultat, pour les tensions crête à crête sur les cellules de Pockels comprises entre $26 \mu\text{V}$ et 100 mV , est $V_\lambda = 511 \pm 2 \text{ V}$.

Finalement, nous remarquons que la valeur de V_λ selon les expériences de vérification de l'expression pour le bruit attendu, rapportée dans la section *Fonctionnement de l'ensemble*, est 540 V , avec une incertitude de moins de 5 %. Le manque d'accord entre les différentes mesures n'est pas clarifié, et reste un mystère intéressant.

Le bruit thermique (voir la section *Sources de bruit*) excite tous les modes de résonance mécaniques dans le modulateur et sa monture. L'effet direct, étant donné les paramètres des résonances (la masse M , la fréquence de résonance ω_0 , la surtension Q , la température T) ne peut pas arriver au niveau qui peut nous gêner. Ceci est en contraste avec les mouvements des miroirs du système de stockage, qui par contre sont amplifiés par le nombre effectif des réflexions. Mais une autre possibilité existe : si le mouvement comprime le matériau, l'effet photo-élastique amène changement de l'indice optique, et donc de la longueur optique. Nous avons vu plusieurs pics dans le spectre de l'interféromètre, qui ont pour source les cellules de Pockels, et dont la présence peut être expliquée par ce processus. On peut calculer la grandeur de cet effet :

$$\Delta L = \sqrt{\frac{4kTQ}{M\omega_0^3}} \cdot \frac{1}{V} \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dn}{dV/V} \cdot x$$

où le premier terme est le mouvement causé par le bruit thermique à la résonance; le deuxième le changement du volume V pour le mouvement en y envisagé; le troisième, la sensibilité de l'indice optique du matériau à la pression; et finalement, z est la longueur du cristal. Pour nos modulateurs de AD*P, le coefficient pour le changement de l'indice n pour un changement fractionnel du volume V est $0.40 \Delta n / (\Delta V/V)$ [Davis'68]. Les autres valeurs sont $\frac{1}{V} \frac{dV}{dy} = 166 \text{ mm}^{-1}$, $x = 15 \text{ mm}$, $M = 5 \text{ gr}$, $\omega = 2\pi \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{sec}^{-1}$; et $Q = 30$. Le résultat est qu'on attend un changement de chemin optique de l'ordre de $6 \cdot 10^{-16} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$; dans le schéma optique employé, la lumière passe deux fois à travers le cristal, doublant l'effet attendu. Donc, on arrive à $1.2 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$, en bon accord avec le niveau observé d'à peu près $1 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$. Des changements faits par le fabricant des modulateurs dans la colle du montage des cristaux ont réduit l'ampleur des pics des résonances à un niveau acceptable pour la sensibilité actuelle.

2B) Systèmes d'isolation sismique

La nécessité d'un système d'isolation sismique a été mentionnée dans la section *Sources de bruit*, où on a vu qu'une isolation de quelque $3 \cdot 10^3$ à 100 Hz serait désirable. Dans cette section, les concepts fondamentaux et la description d'un système pratique seront présentés. La section est en deux parties : la première concerne l'isolation sismique propre, et la deuxième les systèmes de contrôle de surtension (dont la nécessité est présentée dans la première partie).

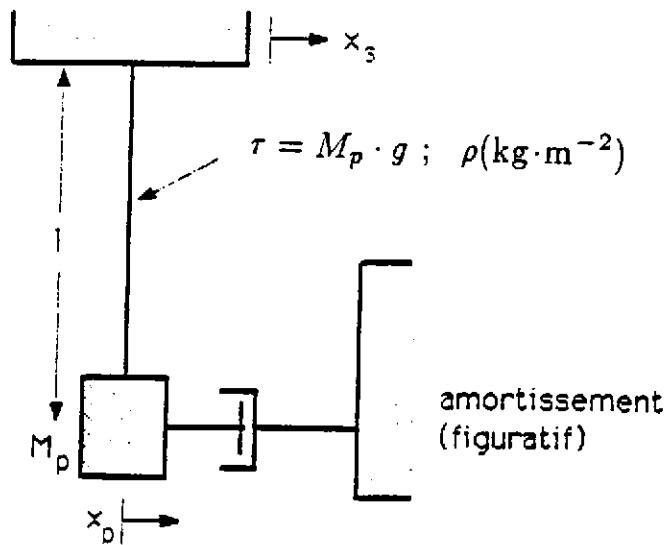


Figure 2B1 : Pendule simple

Le pendule simple

Le principe que nous employons est la suspension pendulaire; effectivement, c'est l'inertie de la masse-test qui réduit son mouvement. Nous calculons d'abord la fonction de transfert reliant le mouvement du point de suspension à celui du pendule, pour un pendule simple; voir la figure 2B1. L'équation du mouvement du pendule est

$$M_p \ddot{x}_p + \frac{M_p \omega_0}{Q_p} (\dot{x}_p - \dot{x}_s) + M_p \omega_0^2 (x_p - x_s) = 0$$

où x_p est le déplacement du pendule, x_s est le déplacement du point de suspension, M_p est la masse du pendule, et $\omega_0 \equiv \sqrt{g/l}$ est la fréquence du mode pendulaire où g est la constante gravitationnelle et l la longueur du fil de suspension. Q_p est le coefficient de qualité du pendule. Dans la formule, le premier terme est dû à l'inertie de la masse; le deuxième terme, à l'amortissement venant des pertes proportionnelles à la vitesse relative du pendule par rapport au point de suspension; et le troisième à l'accélération due au mouvement du point de suspension par rapport au pendule. Transposant l'équation précédente dans le domaine des fréquences par une transformation de Laplace, nous obtenons le rapport complexe $x_p/x_s \equiv X(\omega)$

$$X(\omega) = \frac{\frac{i\omega\omega_0}{Q_p} + \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\omega_0/Q_p}$$

ou sous la forme plus familière du module de la fonction de transfert,

$$|X(\omega)| = \sqrt{\frac{\frac{\omega^2\omega_0^2}{Q_p^2} + \omega_0^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2\omega_0^2}{Q_p^2}}}.$$

Cette formule a quatre régimes intéressants; voir figure 2B2. En-dessous de la résonance, la masse se déplace avec le point de suspension ($x_p = x_s$):

$$|X(\omega \ll \omega_0)| = 1. \quad (I)$$

A la résonance, le mouvement du point de suspension est amplifié:

$$|X(\omega = \omega_0)| = Q_p \quad (II)$$

(où nous avons pris $Q_p \gg 1$). Dans une gamme de fréquence intermédiaire au-dessus de la résonance, l'amplitude est inversement proportionnelle au carré de la fréquence:

$$|X(\omega_0 < \omega < \omega_0 \cdot Q_p)| = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (III)$$

Pour les fréquences plus hautes, la fonction de transfert est dominée par le terme contenant Q_p dans le numérateur, ce qui donne une signature en $1/\omega$;

$$|X(\omega > \omega_0 \cdot Q_p)| = \frac{\omega_0}{\omega} Q_p. \quad (\text{IV})$$

Le pendule supprime efficacement le mouvement du point de suspension dans les deux derniers régimes, donc nous choisissons la fréquence de résonance ω_0 beaucoup plus petite que la fréquence des ondes de gravitation que nous voudrions détecter (qui varient d'environ 100 Hz à 5 kHz).

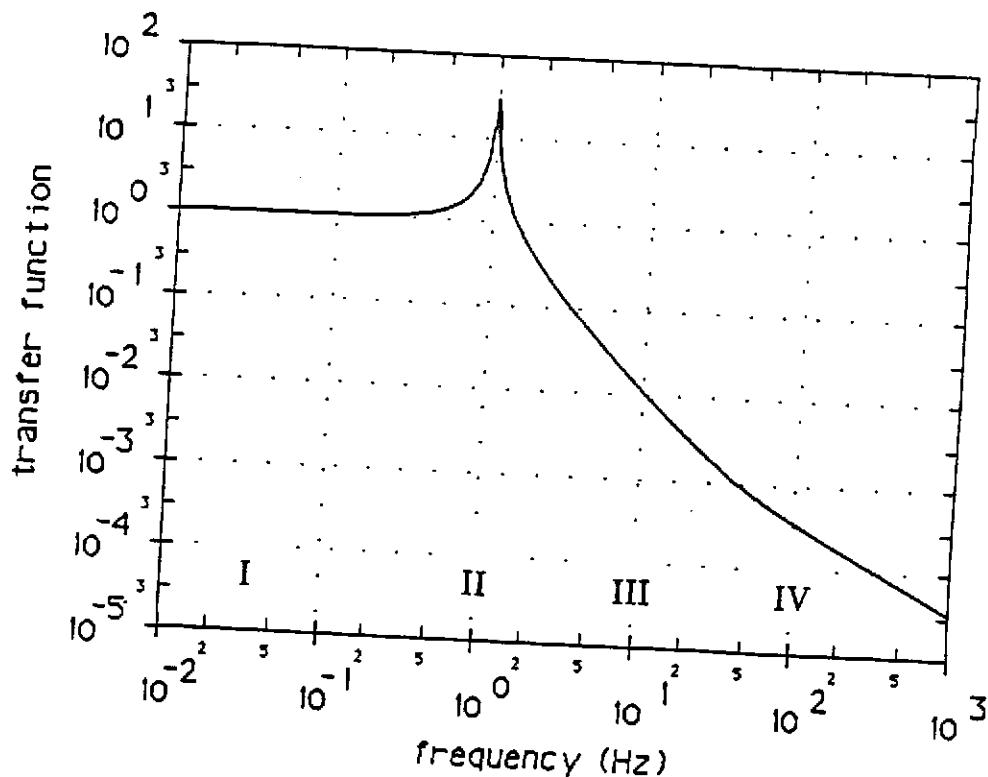


Figure 2B2 : Fonction de transfert pour un pendule simple

Fonction de transfert réaliste

Dans l'analyse du pendule simple ci-dessus nous n'avons pas tenu compte des résonances des fils de support. Ces résonances, les modes 'corde de violon', compromettent l'isolation du pendule aux fréquences plus hautes. Par simplicité, nous parlons ici d'un seul fil de support, mais les résultats peuvent être modifiés pour des fils multiples.

L'équation de mouvement du fil est, dans la limite où la raideur et l'amortissement sont négligeables,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

pour un mouvement dans la direction x perpendiculaire au fil. La vitesse de propagation des ondes transverses est $v_c = \sqrt{T/\rho}$, où $T = M_p g$ est la tension dans le fil, et ρ la densité linéaire du fil. Prenons une solution périodique en temps et stationnaire en position $x = U(z)e^{i\omega t}$; en substituant dans l'équation de mouvement, on trouve la solution

$$U(z) = A \sin kz + B \cos kz$$

avec $k = \omega/v_c$. On a deux conditions aux limites qui nous permettent de déterminer A et B . A $z = 0$, le mouvement du point de suspension est égal à B : $x_s = B$. A $z = l$, on tient compte de la masse du pendule:

$$M_p \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -T \frac{\partial x}{\partial z}.$$

Avec la solution ci-dessus, on trouve

$$-M_p \omega^2 (A \sin kl + B \cos kl) = -T k (A \cos kl - B \sin kl)$$

ce qui donne deux équations pour les deux inconnues A et B . Enfin, pour la fonction de transfert, on a

$$|X_p| = \frac{U(z=l)}{x_s} = \frac{1}{\cos kl - \sqrt{\frac{M_p}{\rho l}} \frac{\omega}{\omega_n} \sin kl}.$$

Il vaut la peine de remarquer que le système est complètement analogue à une ligne à transmission électrique terminée par une impédance inductive. Si on remplace la vitesse \dot{x} par le courant I , la masse M_p par l'inductance L et la vitesse v_c par $v_E = 1/\sqrt{L'C'}$ (la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques

sur la ligne à transmission, où L' et C' sont la capacité et l'inductance par unité longueur de la ligne à transmission), la dérivation et le résultat pour la fonction de transfert sont identiques. Donc, on peut profiter de la nomenclature et des résultats de la théorie des lignes pour l'analyse des systèmes plus compliqués. Nous donnons ici les équivalences :

<i>pendule réaliste</i>	<i>ligne à transmission électrique</i>
vitesse transverse \dot{x}	courant I
force F	tension électrique V
masse M	inductance de la terminaison L
densité linéaire ρ	inductance linéaire L'
compliance du fil $1/T$	capacité linéaire C'
vitesse de propagation v_c	vitesse de propagation v_E

L'impédance caractéristique du fil est $Z_f = \sqrt{M_p g \rho}$, et pour la ligne électrique elle est $Z_E = \sqrt{L/C}$ (pour une ligne sans pertes). La fonction de transfert électrique $X_E(\omega)$ est donnée par le rapport des tensions (récepteur)/(transmetteur); l'analogie pour le système mécanique $X_P(\omega)$ est le rapport des vitesses transverses (pendule)/(point de suspension) qui est identique au rapport des déplacements. Enfin, on donne l'impédance $R(\omega)$ vue du point de suspension du système fil-masse, qui est le rapport F/v_c :

$$R = Z_f \cdot \frac{i\omega M_p \cos kl + iZ_f \sin kl}{-\omega M_p \sin kl + Z_f \cos kl}.$$

Les cas limites : On exige que la fonction de transfert, compte tenu du fil de suspension, se comporte comme le pendule simple pour les fréquences beaucoup plus petites que la fréquence de la première résonance du fil. Voir la figure 2B3. Pour $kl \ll \omega_0/c$, c'est à dire au-dessous de la résonance pendulaire, on trouve $X_p = 1$. Dans notre analyse simplifiée, il n'y a pas de pertes, donc sur la résonance pendulaire ($\omega = \omega_0$) la fonction de transfert X vaut l'infini (au lieu de Q_p). Entre

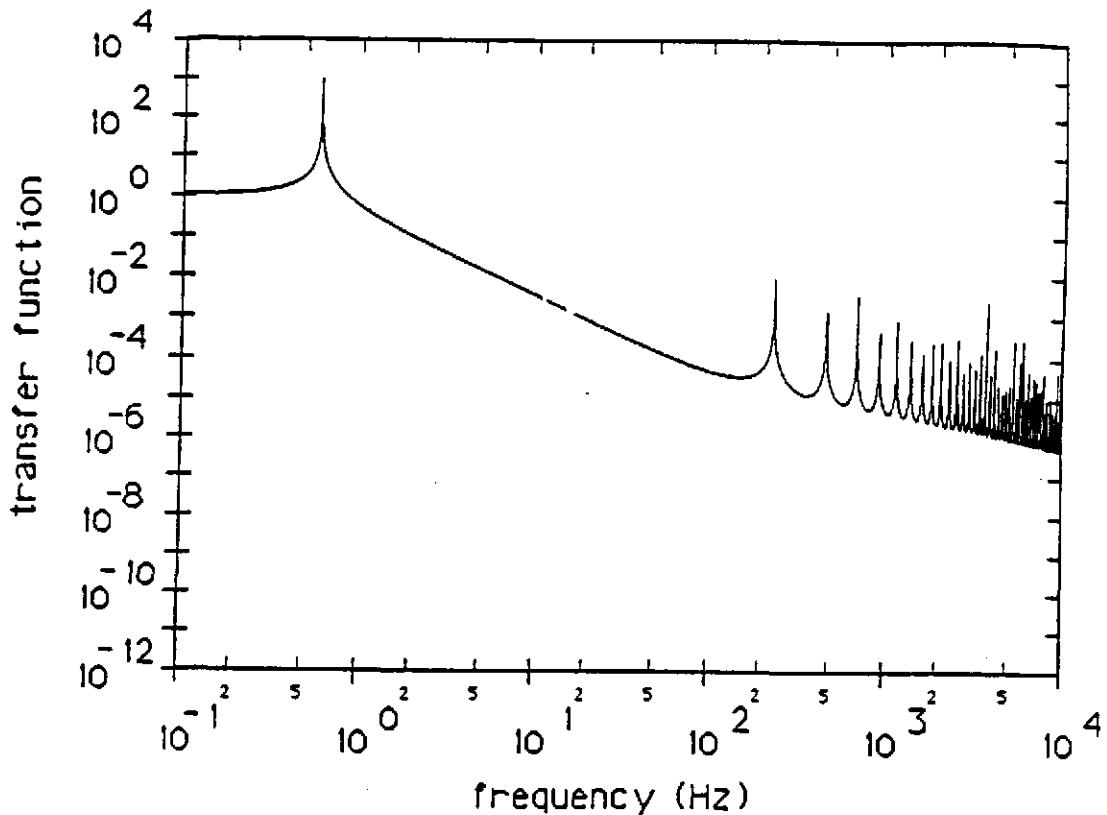


Figure 2B3 : Fonction de transfert pour un pendule réaliste

la résonance pendulaire ω_0 et la première résonance de la corde, la fonction de transfert se comporte comme $(\omega_0/\omega)^2$, comme pour le pendule simple.

Les résonances de la corde peuvent être trouvées par l'approximation $kl \approx n\pi$, où le dénominateur de la fonction de transfert devient égal à zéro, donnant une série de résonances

$$\omega_n \approx n\pi\omega_0 \sqrt{\frac{M_p}{l_p\rho}},$$

encore avec une amplitude infinie car aucune perte n'a été incluse. La caractéristique la plus importante du système est le comportement entre les résonances, où on trouve pour la meilleure isolation $X(\omega)$

$$X(\omega) \approx \frac{\omega_0}{\omega} \sqrt{\frac{l_p\rho}{M_p}},$$

qui doit être comparée avec la caractéristique $(\omega_0/\omega)^2$ pour le pendule simple (et les fréquences $\omega_0 < \omega < \omega_0/Q_p$). En bref, le pendule réaliste donne une isolation qui est inversement proportionnelle au carré de la fréquence, mais seulement jusqu'à la première résonance du fil de suspension, où l'isolation a une signature en $1/\omega$.

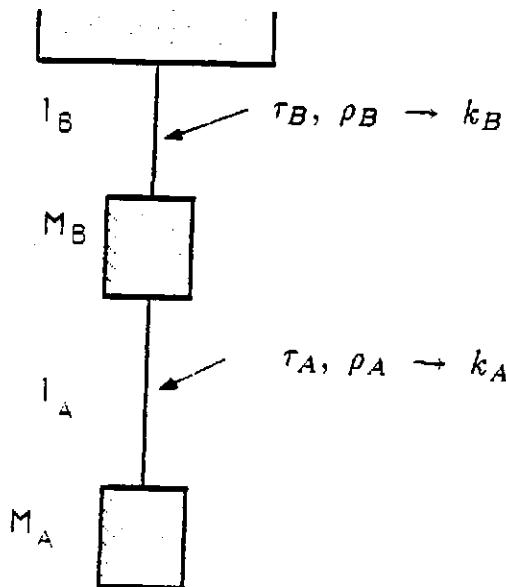


Figure 2B4 : Pendule double

Le pendule double

L'analyse peut être élargie aux systèmes plus compliqués. En particulier, un système qui consiste en deux pendules en série est intéressant (voir la figure 2B4). La fonction de transfert X pour la masse inférieure M_A , avec un mouvement de la masse supérieure M_B , est celle que nous avons déjà calculée. La fonction de transfert X' de la masse supérieure M_B pour un mouvement du point du suspension est un peu différente, parce que l'impédance qui 'termine' la ligne (ou fil) 'B' n'est pas seulement celle de la masse M_B , mais aussi l'impédance du système fil- M_A .

76 Mécanismes de perte dans les pendules

Les deux pendules peuvent avoir des fils et des longueurs différents. Donc, pour l'impédance qui termine le fil 'B' on a

$$R_B = Z_{fA} \cdot \frac{i\omega M_A \cos k_A l_A + iZ_{fA} \sin k_A l_A}{-\omega M_A \sin k_A l_A + Z_{fA} \cos k_A l_A} + i\omega M_B$$

et pour la fonction de transfert X'' donnant le déplacement de la masse M_A pour un déplacement du point de suspension, on a le produit des deux fonctions de transfert :

$$X'' = X' \cdot X$$

$$= \frac{1}{[\cos k_A l_A - \frac{\omega M_A}{Z_{fA}} \sin k_A l_A] \cdot [\cos k_B l_B + i \frac{R_B}{Z_{fB}} \sin k_B l_B]}$$

avec

$$k_B = \omega \sqrt{\rho_B / T_B}$$

Normalement, on prend les valeurs M_A et M_B beaucoup plus grandes que les masses des fils. A cause de cela, les deux fils sont découplés, et le spectre des résonances des fils est à peu près la somme des spectres des deux pendules pris séparément. Les deux masses ont deux modes en basse fréquence, l'un symétrique et l'autre antisymétrique. La fonction de transfert X'' pour des valeurs typiques de $M_B = 3.5 \cdot M_A$, $l_B = 0.14 \cdot l_A$, et $\rho_B = 1.5 \cdot 10^3 \cdot \rho_A$ est donnée dans la figure 2B5. La longueur totale du système d'isolation est à peu près la même que pour un système d'un seul pendule, mais l'isolation disponible aux fréquences d'intérêt est nettement meilleure pour le système à deux pendules.

Mesure expérimentale de la fonction de transfert : Nous avons fait une mesure expérimentale de la fonction de transfert des systèmes d'isolation à un et deux étages pour vérifier les modèles ci-dessus. L'expérience est décrite dans la section *Fonctionnement de l'ensemble*; la figure 2B6 montre les courbes expérimentales et théoriques ensemble. Les caractéristiques principales des deux sont en bon accord : la partie basse fréquence où la fonction de transfert varie avec $(\omega_0/\omega)^{-2}$ pour le pendule simple, et avec $(\omega_0/\omega)^{-4}$ pour le pendule double, et la partie haute fréquence dominée par les résonances des fils de suspension. Il y a des résonances supplémentaires qui ne sont pas prédictes par notre théorie, peut-être à cause du couplage entre les deux fils de suspension, et plusieurs pics dus au secteur (50 Hz, 100 Hz,...). Nous pouvons dire que le fonctionnement des systèmes d'isolation composés de pendules est bien compris.

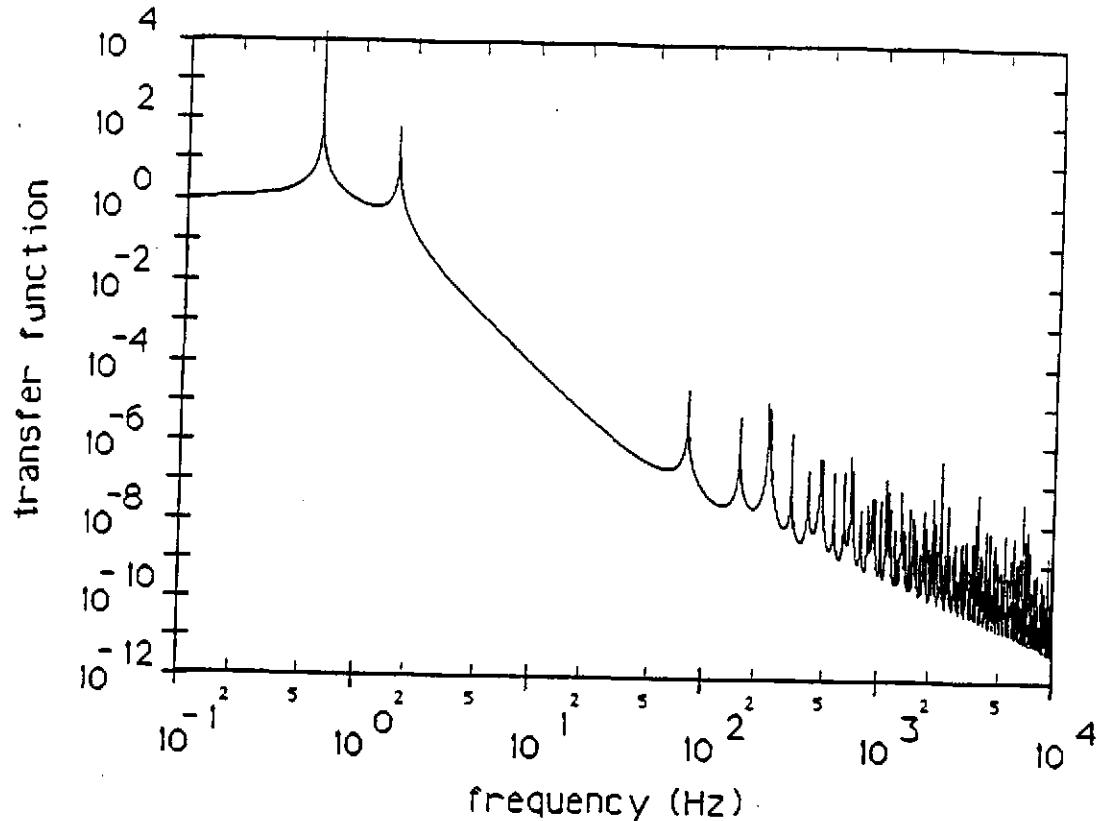


Figure 2B5 : Fonction de transfert, pendule double

Mécanismes de perte dans les pendules

Nous avons déjà vu qu'il faut un Q_p grand pour minimiser le bruit thermique (voir la section *Sources de bruit*). En plus, un Q_p grand donne une signature en $1/\omega^2$ sur une large plage, donc un filtrage meilleur. Pour ces raisons, il est intéressant de discuter des mécanismes qui limitent la surtension Q_p .

Flexion du fil: On voudrait être limité par les pertes dans le fil de suspension, car on ne peut pas réduire cet effet par une meilleure conception expérimentale au-delà de la sélection du matériau pour le fil. La flexion du fil est importante dans la région proche du point d'accrochage. Il apparaît là une cause d'amortissement caractérisée par une surtension Q_{fil} , qui résulte de la friction interne du fil.

Pour estimer l'ordre de grandeur de cet effet, nous faisons un modèle simplifié. Voir la figure 2B7. La condition limite du fil à sa jonction avec le support est $\partial x / \partial z = 0$. La tension $T = M_p g$ sur le fil, faisant un angle $\theta \approx x_p / l_p$ avec la verticale, exerce un couple $M = T \theta \cdot l_c$ sur le fil. La longueur de fil l_c est celle qui

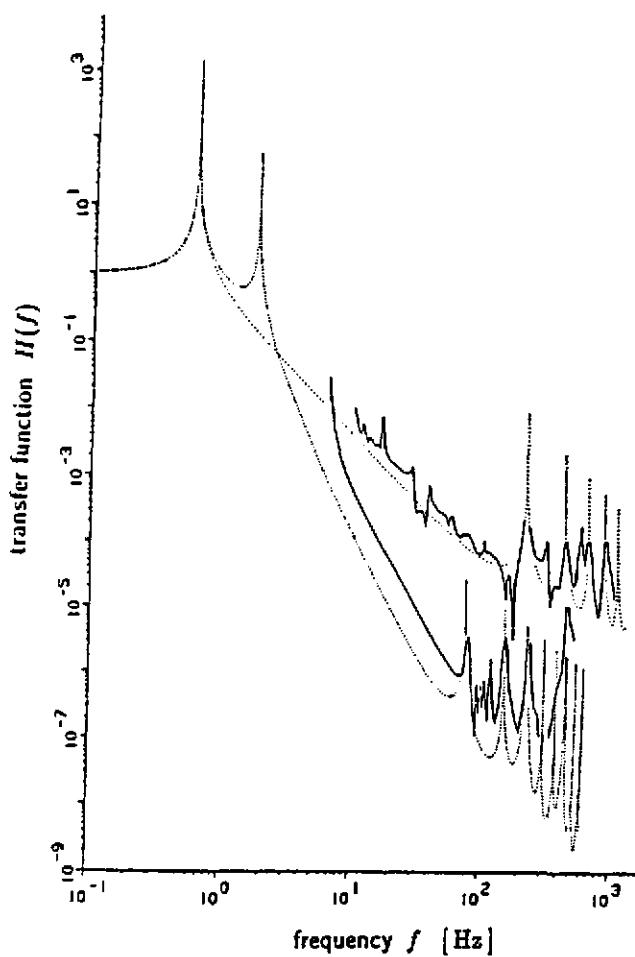


Figure 2B6 : Fonctions de transfert, mesurées et calculées, pour un et deux pendules réalistes. En haut: pendule simple. En bas: pendule double.

est nécessaire pour courber celui-ci entre la condition limite $\partial x / \partial z = 0$ et θ . Pour une fibre cylindrique de rayon a et de module d'élasticité Y soumise à un couple M , l'angle ϕ de flexion est [Morse'68]

$$\phi = \frac{4 M l_c}{\pi Y a^4}$$

ou, substituant notre M particulier,

$$\phi = \frac{4\pi l_c^2 \theta}{\pi Y a^4} .$$

Nous demandons que $\phi = \theta$, ce qui donne pour l_c

$$l_c = \sqrt{\frac{\pi Y a^4}{4M_p g}} .$$

L'énergie stockée dans le fil peut être déduite de la première formule en introduisant une raideur effective $K = \pi Y a^4 / 4l_c^3$ et un déplacement $x \approx \theta l_c / 2$:

$$E_f = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{\pi Y a^4 \theta^2}{32 l_c} = \sqrt{\frac{\pi Y a^4 M_p g}{64}} \left(\frac{x_p}{l_p} \right)^2 .$$

De la même façon, on a pour l'énergie stockée dans le pendule

$$E_p = \frac{M_p g}{2} \frac{x_p^2}{l} .$$

Avec la définition de la surtension

$$Q_{osc} \equiv \omega \cdot \frac{[\text{Energie } E \text{ stockée dans l'oscillateur}]}{[\text{Puissance moyenne } \wp \text{ dissipée par l'oscillateur}]} ,$$

on peut calculer la puissance \wp dissipée par le fil: $\wp = \omega E / Q_{fil}$. Puis, on prend cette puissance pour calculer la surtension du pendule $Q_{p,f}$ limitée par les pertes dues à la flexion du fil de suspension:

$$Q_{p,f} = Q_{fil} \cdot \frac{E_f + E_p}{E_f} \approx Q_{fil} \cdot \frac{E_p}{E_f} .$$

Dans ce cas-ci, on a

$$Q_{p,f} = Q_{fil} \cdot \frac{8l_p}{a^2} \sqrt{\frac{M_p g}{\pi Y}} .$$

Notons qu'avec j fibres identiques qui ont ensemble la même solidité que la seule fibre ci-dessus, on a une surtension plus élevée: $Q_{p,f}(j \text{ fibres}) = \sqrt{j} \cdot Q_{p,f}(1 \text{ fibre})$. De la même façon, si on prend la section du fil πa^2 proportionnelle à la masse M_p , on voit que $Q_{p,f}$ est inversement proportionnel à la masse M_p du pendule. Notons aussi que le module d'élasticité Y et la surtension Q_f sont des fonctions de la fréquence [Quinn'87]; ils deviennent en général plus grands quand la fréquence croît.

Les meilleurs matériaux pour les fils de suspension doivent avoir non seulement une grande surtension interne Q_{fil} , mais aussi une résistance de rupture à la traction grande (caractérisée par la longueur de fil qui se brise sous son propre poids, l_{rup}), qui permet un diamètre a petit. Actuellement, on prend l'acier, pour lequel on a $Q_{fil} \approx 10^3$, $Y \approx 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, et $l_{rup} \approx 25 \text{ km}$. Pour l'interféromètre Garching, le rayon des (deux) fils est $a = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, la masse du pendule est $M_p = 1.1 \text{ kg}$, et la longueur du pendule est $l_p = 0.7 \text{ m}$. Ainsi, la surtension limitée par les pertes de flexion des fils est $Q_{p,f} \approx 10^7$.

Flexion du cadre de support : Une autre source de perte d'énergie pour le pendule vient du mouvement du point de suspension induit par le mouvement du pendule. Typiquement, la structure de support est un cadre rigide et massif, avec des fréquences de résonance beaucoup plus hautes, et des surtensions Q_{sup} beaucoup plus petites, que celles du pendule. Le pendule a une masse M_p et une longueur l , donc une fréquence $\omega_p = \sqrt{g/l}$. La structure du support a une masse M_s et une raideur K_s , donc une fréquence de résonance $\omega_s = \sqrt{K_s/M_s}$, et une surtension connue Q_{sup} .

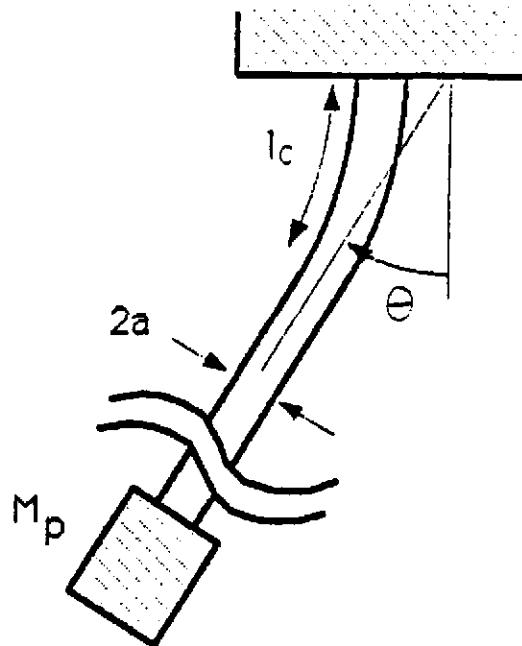


Figure 2B7 : Schéma pour le calcul des pertes dans la flexion du fil

Si le pendule a une amplitude de mouvement sinusoïdale A_p , le mouvement résultant du support A_s , pour les fréquences plus basses que ω_s , est :

$$A_s = \frac{F_s}{K_s} = \frac{A_p M_p g}{l K_s}$$

et la vitesse du support est $v_s = \omega_p \cdot A_s$; l'énergie stockée E_s est

$$E_s = \frac{1}{2} M_s v_s^2 = \frac{M_s \omega_p^2}{2} \left(\frac{M_p g A}{K_s l} \right)^2$$

On peut calculer la puissance φ_s dissipée dans la structure de support; cette puissance est perdue pour le pendule, ce qui donne une surtension pour le pendule :

$$Q_{p,s} = \omega_p \frac{E_p}{\varphi_s} = Q_{sup} \cdot \frac{\omega_s^2}{\omega_p^2} \frac{M_s}{M_p}$$

où nous avons simplifié la formule avec les définitions de ω_s et ω_p .

Donc le cadre de support doit être massif et rigide, et doit avoir une grande surtension propre. La construction n'est pas optimisée dans l'interféromètre de Garching. On trouve pour la surtension du support $Q_{sup} \approx 17$, une fréquence de résonance $\omega_s \approx 13$ Hz, et une masse $M_p \approx 15$ kg. La surtension du pendule à cause des pertes dans le cadre, mesurée à la fréquence de la résonance du pendule ω_p , est $Q_{p,s} \approx 7 \cdot 10^4$. Pour les fréquences plus hautes que ω_s , la surtension du pendule $Q_{p,s}$ à cause de cet effet sera plus grande.

Collisions avec le gaz résiduel : Le transfert de la quantité de mouvement du pendule aux molécules du gaz résiduel peut être facilement calculé dans la limite des basses pressions. Si le libre parcours moyen est plus grand que la distance entre les surfaces du pendule et les parois de l'enceinte à vide, on peut ignorer l'interaction molécule-molécule. Prenons un pendule de masse M_p , de vitesse v_p , et de surface A perpendiculaire au mouvement pendulaire, dans un gaz de molécules de masse m , de vitesse moyenne $v_{th} = \sqrt{8kT/\pi m}$ (où k est la constante de Boltzmann, et T la température). Soit μ le nombre moyen de molécules par unité de volume. Le nombre de molécules dN qui frappent sur une face de la masse en un temps dt est [Reif'65]

$$dN = \frac{\mu}{4} A (v_{th} - v_p) dt$$

et le changement $\Delta \dot{x}_p$ de vitesse de la masse à cause de chaque collision (supposée élastique) est

$$\Delta \dot{x}_p = \frac{2m}{M_p + m} [v_{th} - (\dot{x}_p - \dot{x}_s)] .$$

où nous avons explicitement écrit la vitesse du pendule relativement à la vitesse \dot{x} , des parois. On trouve la même chose pour l'autre face de la masse, avec un changement du signe de \dot{x}_p . Ajoutant les deux contributions, on a pour le changement total de la vitesse du pendule

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{\omega_0}{Q_{p,g}} (\dot{x}_p - \dot{x}_s) \approx 2\mu A v_{th} v_p \frac{m}{M_p + m} ,$$

ce qui définit la surtension $Q_{p,g}$ venant du gaz résiduel. Résolvant cette dernière équation pour ce $Q_{p,g}$, nous avons

$$Q_{p,g} = \frac{\omega_0}{2\mu A v_{th}} \frac{M_p + m}{m} .$$

Pour le calcul de $Q_{p,g}$, les paramètres prennent les valeurs $m = 4.7 \cdot 10^{-26}$ kg (pour de l'azote), $v_{th} = 450 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, et $\mu = P \cdot 2.7 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ où P est la pression en Pa. Le libre parcours moyen ℓ_{pm} dans le gaz est donné par $\ell_{pm} \approx 1/\sqrt{2}\mu\sigma_m$, où σ_m est la section efficace de collision par molécule, à peu près 10^{-20} m^2 pour l'azote; avec les pressions P prévisibles dans les grands interféromètres ($P \approx 10^{-4}$ Pa) on trouve un ℓ_{pm} de quelques centaines de mètres, donc notre condition est bien satisfaite.

Mesure expérimentale de la surtension : Sur l'interféromètre de Garching, la surtension d'un pendule typique a été mesurée à la fréquence de la résonance ω_p . La figure 2B8 montre la courbe expérimentale, donnant la surtension en fonction de la pression autour du pendule. Le pendule a une fréquence de $2\pi \cdot 1 \text{ Hz}$, une masse de 1 kg, et une surface de $1.8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$. Trois régimes peuvent être identifiés: pour les pressions plus grandes que 10 Pa, le libre parcours moyen est plus petit que les dimensions typiques du système, donc notre calcul pour $Q_{p,g}$ n'est pas valable. Entre 10 Pa et 10^{-2} Pa la courbe est en accord raisonnable avec la prédiction pour $Q_{p,g}$. Pour une pression plus basse que 10^{-2} Pa, la surtension parvient à une valeur limite qui est donnée par $Q_{p,s}$, c'est à dire les pertes venant du mouvement du cadre de support. On ne voit pas l'influence des pertes dans les fils de support ($Q_{p,f} \gg Q_p$).

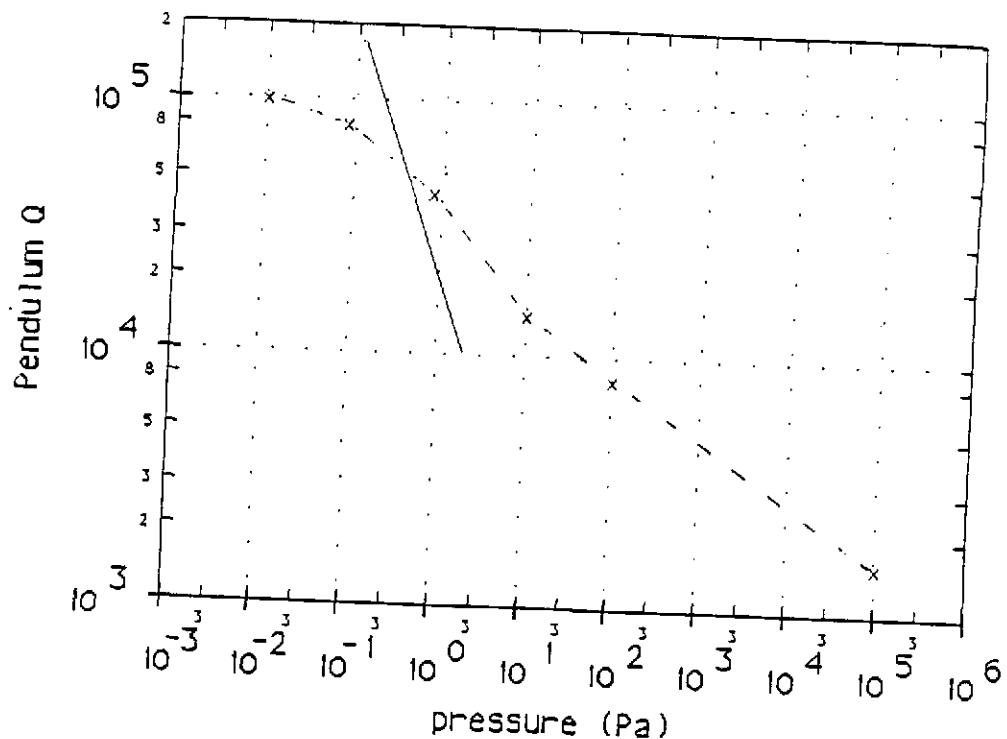


Figure 2B8: Surtension du pendule en fonction de la pression

Pour les grands interféromètres, la surtension calculée à cause du gaz résiduel est $Q_{p,g} = 5 \cdot 10^9$.

Enfin nous donnons une expression pour la surtension Q_p attendue à cause des mécanismes ci-dessus. Les puissances s'ajoutent, donc les surtensions Q s'ajoutent en inverse :

$$Q_p = \left(\frac{1}{Q_{p,f}} + \frac{1}{Q_{p,g}} + \frac{1}{Q_{p,s}} \right)^{-1}.$$

Notons qu'avec un pendule multiple, chacun de ces effets peut être calculé pour chaque mode propre du système, en tenant compte des mouvements de chaque masse et de chaque fil. Par exemple, pour un système de deux pendules en série, on a deux modes pendulaires propres, l'un symétrique, l'autre antisymétrique. Ceci donne un $Q_{p,f}$ différent pour chacun des deux modes, et de la même façon, on trouve des différences dans les autres effets.

2C) Contrôle de la surtension, systèmes d'alignement

La nécessité, le concept

Nous avons remarqué dans la section *Systèmes d'isolation sismique, Le pendule simple* qu'à la fréquence de résonance du pendule ω_0 , le mouvement du pendule est Q_p (où Q_p est la surtension du pendule) fois plus grand que le mouvement du point de suspension. Avec les paramètres typiques de $Q_p = 10^5$, $\omega_0 = 2\pi \cdot 0.7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, et une amplitude de bruit sismique qui suit la loi $B_{sis} = (10^{-7}/f^2) \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$, on calcule une amplitude effective d'oscillation du pendule, égale au produit de (la densité spectrale linéaire du bruit à la fréquence ω_0) par (la fonction de transfert du pendule à ω_0) par (la racine de la largeur de la résonance) :

$$\langle x_p \rangle = B_{sis} \cdot Q_p \cdot \sqrt{\frac{\omega_0}{2\pi Q_p}} \approx 50 \mu\text{m} .$$

Il y a plusieurs problèmes liés avec un tel mouvement. Chaque degré de liberté du pendule est excité (mouvements transverses, rotations), ce qui produit des désalignements importants et variables dans le temps des systèmes optiques. Cela a pour conséquence qu'un alignement optique fait par le positionnement des points de suspension ne suffit pas. D'autre part, nous voudrions maintenir l'interféromètre sur une frange d'interférence sombre; le déplacement relatif entre les masses-test (i.e., les pendules) doit être très inférieur à une longueur d'onde optique (de l'ordre de 1 μm), ce qui n'est pas le cas.

L'équation du mouvement: Ces problèmes pourront être résolus avec un système d'asservissement contrôlant la vitesse et la position des pendules. Nous mettons en place des senseurs qui mesurent les déplacements des pendules par rapport à l'environnement. Ces signaux, avec des informations dérivées du signal d'interféromètre et des commandes d'alignement, sont filtrés et convertis en forces sur les pendules. L'analyse du système commence avec l'équation de mouvement du pendule; voir la figure 2C1 :

$$M_p \ddot{x}_p + \frac{M_p \omega_0}{Q_p} (\dot{x}_p - \dot{x}_s) + \gamma(\omega) (\dot{x}_p - \dot{x}_s) + M_p \omega_0^2 (x_p - x_s) = F_a$$

où x_p est le déplacement du pendule, x_s est le déplacement du point de suspension (et aussi du point de mesure pour les fréquences d'intérêt), M_p est la masse du pendule, et $\omega_0 \equiv \sqrt{g/l}$ est la fréquence du mode pendulaire (g est la constante gravitationnelle et l la longueur du fil de suspension). Par comparaison avec l'équation pour le pendule simple qui était donnée dans la section *Systèmes d'isolation sismique*, nous avons ajouté un deuxième terme d'amortissement, proportionnel à $\gamma(\omega)$, et une force F_a qui est constante (i.e., qui change très lentement par rapport à la fréquence de résonance ω_0). En régime stationnaire, on a

$$x_p - x_s = \frac{F_a}{M_p \omega_0^2} \quad (\omega \ll \omega_0) .$$

Ainsi, nous pouvons faire un ajustement de la position du pendule par un changement de la force F_a .

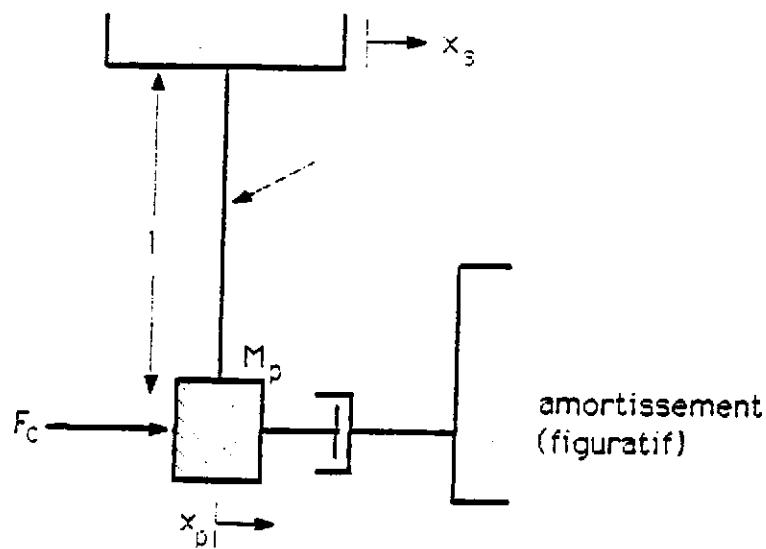


Figure 2C1 : Schéma pour l'analyse du pendule avec l'amortissement actif

L'amortissement actif: Le terme $\gamma(\omega)(\dot{x}_p - \dot{x}_s)$ est dérivé d'un senseur qui mesure le déplacement relatif ($x_p - x_s$). Voir la figure 2C2 pour une vue générale du système d'asservissement. Le signal livré par le senseur S est une tension $V_s = S \cdot (x_p - x_s)$. Le filtre F a une fonction de transfert $H(\omega)$ qui est, dans le cas le plus simple, un différentiation. G représente le gain de l'amplificateur A. Le moteur M exerce une force F_c proportionnelle à la tension appliquée $F_c = CV$. Nous avons

$$F_c = C \cdot G \cdot H(\omega) \cdot V_s$$

$$\gamma(\omega)(\dot{x}_p - \dot{x}_s) = C \cdot G \cdot \frac{d}{dt}(S \cdot (x_p - x_s))$$

pour l'effet dynamique sur le pendule. Notons que le coefficient de la vitesse dans l'équation du mouvement peut être écrit comme une surtension équivalente $Q_{eq}(\omega) = \omega_0/\gamma(\omega)$. Le filtre ci-dessus, c'est à dire un simple différentiateur, ne produit qu'un changement de la valeur du coefficient de surtension Q_{eq} .

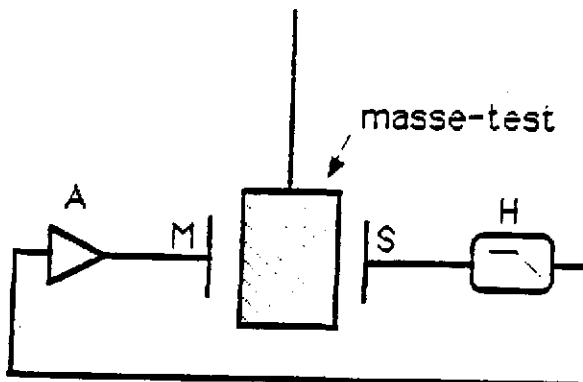


Figure 2C2 : Asservissement pour l'amortissement actif

Trois remarques sont nécessaires. Si on choisit un gain G tel que le pendule soit amorti critiquement, le mouvement du pendule est réduit à un niveau à peu près égal au mouvement sismique à la fréquence de résonance du pendule. Le mouvement résiduel, de l'ordre de $1 \mu m$, est suffisamment petit pour tenir un alignement optique. Il est toujours nécessaire de trouver un signal d'erreur qui vient de l'interféromètre pour maintenir l'interférence sur le point désiré. Ce

problème est discuté dans la section *Détection de signal*; ici nous supposons qu'un tel signal est disponible.

Notons aussi que l'amortissement venant du système d'asservissement a une nature différente de l'amortissement venant des pertes. Aucune puissance n'est dissipée dans le pendule pour faire l'amortissement actif; l'énergie est soustraite par l'asservissement. Si le mouvement amorti par l'asservissement provenait de l'excitation thermique, cet asservissement serait une forme de refroidissement de l'oscillateur pendulaire, aboutissant à un niveau de bruit thermique plus petit que celui attendu à cause de la température ambiante.

En fait, le mouvement thermique du pendule est plus petit que le bruit des senseurs, et seul le mouvement sismique à basse fréquence peut ainsi être réduit. Pour les fréquences plus hautes qu'à peu près 10 Hz, le mouvement sismique est aussi plus petit que le bruit des senseurs. Afin d'éviter que le bruit des senseurs ne soit réinjecté sur les pendules à travers le système d'asservissement, nous introduisons dans le filtre $H(\omega)$ des éléments passe-bas qui 'coupent' le signal pour les hautes fréquences; ainsi, le pendule se comporte comme un pendule de surtension Q_p pour les fréquences d'intérêt astrophysique, sans interférence électronique, et un pendule de surtension unité pour les fréquences dans le voisinage de la résonance.

Un dernier point: on peut avoir une mesure de l'accélération de la masse-test (en mettant un accéléromètre sur la masse-test). Si ce signal est appliqué à la masse-test avec un gain et une phase corrects, la fréquence de résonance peut être fortement réduite. Cette technique d'*isolation vibration active* n'est pas discutée ici; voir [Saulson'84b], [Giazotto'86], et [Robertson'82] pour les discussions relevant des antennes gravitationnelles.

Systèmes réalistes

Chaque pendule a six degrés de liberté: trois translations et trois rotations. Pour les systèmes optiques considérés, la translation sur l'axe optique est le plus sensible des mouvements, mais les autres sont importants pour l'alignement, et, au premier ou au deuxième ordre, peuvent influencer la longueur optique. Donc en général il faut asservir tous les mouvements possibles. Dans certains cas, on peut négliger plusieurs mouvements: les rotations autour de l'axe optique sont peu gênantes. Si la fréquence de résonance verticale est suffisamment haute et possède une surtension suffisamment basse, les mouvements seront assez petits à basse fréquence pour éliminer la nécessité d'asservissement. Notons que ces caractéristiques ne sont pas optimales pour l'isolation aux hautes fréquences.

En construisant des systèmes d'asservissement à plusieurs degrés de liberté, il faut considérer l'interaction entre les degrés de liberté. Le senseur et le moteur sont en général des entités séparées. Si le point de la masse-test dont la position est mesurée ne coïncide pas avec le point où la force est effectivement exercée par le moteur, ou si la force est exercée dans une direction différente de la direction mesurée, il existe un couplage entre les mouvements. Des couplages de ce genre peuvent causer l'instabilité de l'asservissement, ou permettre au bruit dans une direction moins bien isolée d'être transféré à une direction plus sensible. On peut les éviter avec une conception mécanique soignueuse, ou avec un système de recombinaison des signaux qui produit un découplage électronique. Les deux solutions seront discutées ci-dessous de façon plus détaillée.

Un autre aspect des systèmes à plusieurs voies est la nécessité d'avoir une entrée qui produise une translation simple sur l'axe optique, pour aider dans l'asservissement de l'interféromètre lui-même; un arrangement permettant de délivrer un tel signal aux canaux appropriés doit être disponible.

Il est utile de discuter d'abord les techniques des senseurs de mouvement et les moyens pour exercer des forces sur les pendules. L'intégration des deux dans les systèmes complets est présentée à la fin de la section.

Moyens de détection

Généralités : Si le but est de réduire le mouvement induit par le bruit sismique autour de la résonance pendulaire, il faut que le bruit du senseur soit plus petit que le bruit sismique à ces fréquences. Les pendules pratiques ont un ω_0 compris entre $2\pi \cdot 0.5$ Hz (pour une longueur $l = 1$ m) et $2\pi \cdot 2$ Hz ($l = 0.2$ m), donc le bruit sismique 'canonique' est de l'ordre de 10^{-7} m·Hz $^{-\frac{1}{2}}$ (voir la section *Sources de bruit, solutions*). Ainsi, un bruit du senseur inférieur à 10^{-8} m·Hz $^{-\frac{1}{2}}$ à 1 Hz est désirable. On peut remarquer que si l'on veut faire une mesure en continu de la position du pendule, par exemple pour un système d'alignement, la stabilité à long terme devient importante.

L'importance de la sensibilité aux mouvements perpendiculaires à l'axe optique dépend de deux choses. Nous avons déjà mentionné la complexité additionnelle quand la direction du senseur et du moteur ne sont pas sur le même axe. Un deuxième problème peut se présenter quand tous les degrés de liberté ne sont pas amortis. Souvent le mouvement vertical n'est pas amorti activement parce que la fréquence de résonance est trop élevée; ceci réduit l'amplitude du bruit sismique

(car le bruit sismique a un niveau plus petit aux fréquences plus hautes). En plus, les systèmes optiques n'ont pas une forte sensibilité aux mouvements perpendiculaires au faisceau. Mais, si ce mouvement est détecté par un senseur de mouvement parallèle au faisceau, un faux signal sera engendré. Cela doit être évité. Une autre forme d'interaction entre les senseurs peut être gênante : une interférence directe (électrique, magnétique, optique) entre des senseurs adjacents. Ceci peut prendre la forme de l'introduction d'un faux signal, ou bien une saturation d'un senseur avec la porteuse d'un autre.

La plage dynamique doit être assez grande pour rattrapper la masse-test quand elle n'est pas amortie activement. L'amplitude a est d'abord énorme, due à la grande surtension Q_p du pendule sans amortissement ($\approx 135 \mu\text{m}$ effectif, ou $\approx 0.4\text{mm}$ crête à crête). Mais il n'est pas important que le senseur soit linéaire dans cette gamme; c'est plutôt la gamme maximale de réglage optique qui donne une exigence d'à peu près 0.1 mm sur la gamme dans laquelle il faut fonctionner linéairement, pour que le coefficient d'amortissement (c'est à dire le gain dans la boucle d'amortissement actif) reste constant.

Pont capacatif radio-fréquence : Le principe physique de cette mesure est le changement de la capacité entre deux objets en fonction de leur séparation. Notre réalisation est montrée dans la figure 2C3. Le pont, qui consiste en quatre condensateurs C_1, C_2, C_3, C_4 , est près de l'équilibre : $C_1/C_2 \approx C_3/C_4$. Plus tard nous allons expliquer le condensateur composé C_3 . Le pont est excité par un générateur radio fréquence Osc, d'amplitude V_{rf} , et de fréquence ω_{rf} . Le déséquilibre est détecté par l'amplificateur différentiel, de bruit i_b et e_b en courant et tension, respectivement. Le condensateur C_1 consiste en deux parties, l'une étant le senseur S même, l'autre étant la capacité C_c du câble entre le senseur et l'électronique. La partie senseur se compose d'une plaque stationnaire et de la masse-test, cette dernière étant branchée à la masse électrique. La superficie de la plaque, et de la surface de la masse-test qui est en face, est A ; la séparation nominale entre les deux est x_1 . La capacité résultante est

$$C_1(x_1) = \frac{\epsilon_0 A}{x_1} + C_c$$

dont l'impédance est $Z_1 = 1/\omega_{rf}C_1$. À l'entrée de l'amplificateur différentiel,

$$V_+ - V_- = V_{rf} \sin \omega_{rf} t \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + \frac{C_1}{C_2}} .$$

Pour comparer avec le bruit de l'amplificateur, il faut calculer la dérivée :

$$\frac{dV}{dx_1} = -V_{rf} \sin \omega_{rf} t \cdot \frac{1}{1 + \frac{C_1}{C_2}} \cdot \frac{1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{dC_1}{dx_1}$$

ou, dans une forme plus utile,

$$\delta V = V_{rf} \sin \omega_{rf} t \cdot \frac{1}{1 + \frac{C_1}{C_2}} \cdot \frac{1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\epsilon_0 A}{x_1^2} \cdot \delta x .$$

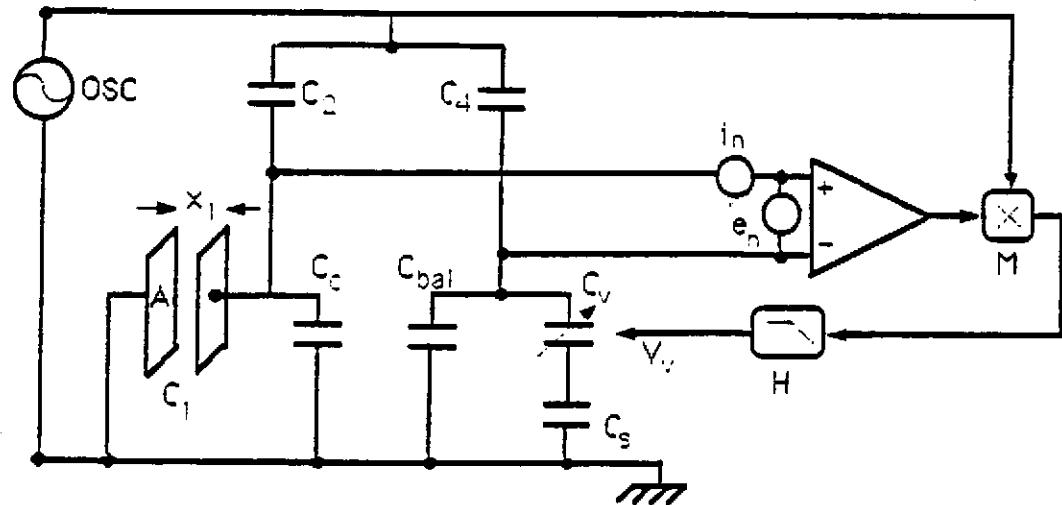


Figure 2C3 : Pont capacitif

A la sortie du mélangeur ('mixer', discuté en détail dans la section *Détection de signal*), le signal est transposé aux basses fréquences, en même temps que le bruit de l'amplificateur. On peut maintenant calculer le 'bruit équivalent position' x_b :

$$x_b = e_b + Z_p i_b \cdot \left(\frac{dV}{dx_1} \right)^{-1} .$$

Le premier point est que le bruit est complètement déterminé par le bruit de l'amplificateur. Cela est vrai dans la limite où l'impédance des condensateurs

possède une partie réelle négligeable, car seules les pertes résistives produisent du bruit, et dans la pratique, cette condition est satisfaite. L'oscillateur doit être suffisamment constant en amplitude V_{rf} , ce qui est vrai pour les oscillateurs à quartz qu'on utilise.

On voit également que pour optimiser la sensibilité, l'écart x_1 devrait être minimisé. Mais on veut que le mouvement relatif normal (à cause du bruit sismique) soit une petite fraction de l'écart total, pour que le senseur reste à peu près linéaire. Avant que le système d'asservissement 'n'accroche', ce mouvement peut atteindre des centaines de μm , donc $x_1 = 1 \text{ mm}$ est raisonnable. A est typiquement un quart de la superficie d'une face de la masse-test, l'espace maximum disponible. Dans le terme C_1 il y a la capacité du câble, qui devrait être minimisée; dans la pratique, elle peut être du même ordre de grandeur que la capacité du senseur même. Ce câble doit être rigide, car des changements de sa capacité (à cause du bruit acoustique, par exemple) apparaissent comme des signaux.

La sensibilité aux mouvements perpendiculaires peut être facilement estimée si on néglige les 'effets de bord'. Prenons des longueurs y et z pour les dimensions de la plaque (tel que $y \cdot z = A$), et un déplacement Δy . Le changement de la capacité est $\Delta C_1 = 2A/4\pi x_1 \cdot \Delta y/y$; la sensibilité relative pour les mouvements en y par rapport aux mouvements en x_1 est ($\Delta x = \Delta y$)

$$\frac{dC_1/\Delta y}{dC_1/\Delta x} = 2 \frac{x}{y} .$$

Les dimensions typiques donnent un rapport d'à peu près 1/50.

Les senseurs adjacents fonctionnent avec des fréquences ω_{rf} différentes, donc après le mélangeur il n'y a pas d'effet direct des autres signaux. Par contre, le niveau des signaux RF qui viennent des autres senseurs serait assez fort pour saturer l'amplificateur d'entrée, produisant des effets non-linéaires. Pour l'éviter, nous avons fait un arrangement des senseurs, qui permet de mettre une garde (bande conductrice) à la masse entre les senseurs adjacents, et un filtre passe-bande à l'entrée du premier amplificateur. La sensibilité résiduelle donne une limite pratique du niveau de la radio-fréquence V_{rf} sur les senseurs.

La stabilité à long terme du senseur condensateur est bonne: il s'agit de couches minces sur la masse-test (qui est en silice) et sur la plaque stationnaire (de verre) avec un bon vide entre les deux lames. C'est plutôt dans le câble entre le senseur et les autres condensateurs du pont qu'on trouve une sensibilité à la température, qui peut être minimisée avec du câble coaxial rigide.

La plage dynamique de notre système [Lindsay'82], pour des raisons compliquées mais intéressantes, est étroite. Afin d'être insensible aux changements dans le gain des radio-fréquences, et de réduire la sensibilité au bruit de la tension radio fréquence V_{rf} , le pont est équilibré en basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$), et le signal d'erreur de cet asservissement 'local' du pont est pris pour l'amortissement actif. Voir encore la figure 2C3. C_3 consiste en deux parties : un condensateur variable C_{bal} , qui permet un réglage mécanique de l'équilibre initial du pont, et un condensateur varactor C_v en série avec le condensateur C_s . Le varactor a une capacité qui change linéairement, dans une plage limitée, avec la tension V_v appliquée. La figure 2C3 montre une esquisse fonctionnelle de l'asservissement : le signal d'erreur du pont est démodulé, et puis filtré par le filtre passe-bas $H(\omega)$, et envoyé au varactor (où il est sommé avec une polarisation). Pour les fréquences plus basses que la fréquence ω_H de coupure de H , le gain de cette petite boucle est élevé, le pont est en équilibre, et le signal d'erreur est presque nul. Pour les fréquences plus hautes, la boucle effectivement 'disparaît', et le signal d'erreur représente le mouvement de la masse-test et peut être employé pour faire l'amortissement actif. La plage étroite de variation de la capacité du varactor correspond à une faible gamme de mouvements de la masse; seulement plusieurs dizaines de μm de mouvement sont permis pour que la boucle reste fermée.

Occultation de lumière incohérente : Ce système de détection est esquissé dans la figure 2C4. Le principe est simple : une lame L opaque interrompt partiellement la lumière tombant sur une photodiode PD, produisant un signal proportionnel à la position de la lame par rapport à la photodiode. Normalement, les positions relatives de la lame et de la lumière sont telles que la moitié de la photodiode est illuminée, ce qui donne une plage linéaire dynamique maximale. Nous avons choisi une diode électroluminescente DEL qui est collimatée par une lentille intégrée avec la diode électroluminescente, donnant une intensité effectivement constante sur la photodiode. Pour un mouvement dans la direction x , le photocourant est

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{I_0}{a} \cdot x && (0 < x < a) \\ &= 0 && (x < 0) \\ &= I_0 && (x > a) \end{aligned}$$

94 Moyens de détection

où I_0 est le photocourant sans lame. Le bruit fondamental de la mesure est le bruit de grenaille, égal à $\tilde{I}_b = \sqrt{2eI(x)}$, où e est la charge de l'électron. Donc, la sensibilité est limitée à

$$\begin{aligned}\tilde{\delta x} &= \sqrt{\frac{2eax}{I_0}} \\ &= a \cdot \sqrt{\frac{e}{I_0}} \quad (x = \frac{a}{2})\end{aligned}$$

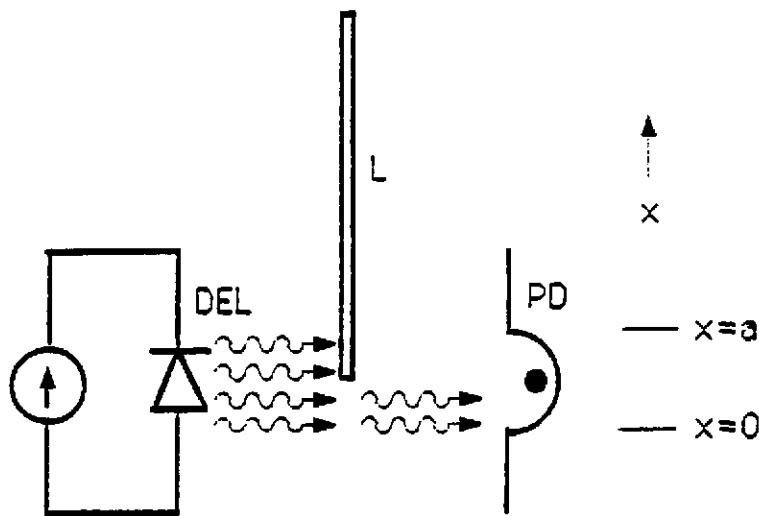


Figure 2C4 : DéTECTEUR de mouvement 'diode électroluminescente-photodiode'

En fait, il y a plusieurs sources de bruit qui sont importantes, en particulier à basse fréquence. L'intensité de la lumière de la diode électroluminescente est proportionnelle au courant I_{del} dans cette diode, donc le bruit de la source de courant i_{del} pour la diode électroluminescente peut apparaître; cet effet est minimisé en utilisant une partie de ce courant pour polariser le convertisseur courant-tension qui suit la photodiode. Le bruit de l'amplificateur i_{amp} , e_{amp} est l'autre source principale de bruit. Enfin, la position du faisceau qui sort de la diode électroluminescente pourrait fluctuer [Speake'87]. Ces effets dominent autour de la fréquence de résonance ω_0 .

Le système de mesure est relativement insensible aux mouvements parallèles à la lame si la lame a un bord lisse, coupé bien perpendiculaire à la direction qui devrait être sensible. La sensibilité aux mouvements parallèles à l'axe optique, et aux rotations autour de l'axe optique, vient principalement des imperfections du système optique : la lumière n'est ni parfaitement collimatée ni totalement uniforme en intensité. Ces effets deviennent plus importants si la lame n'est pas bien centrée sur l'axe optique. Il n'est pas utile d'essayer de calculer leur grandeur, car nous n'avons pas un modèle suffisamment précis du faisceau de diode électroluminescente; ils sont caractérisés par des mesures.

La lumière est bien limitée à la région du senseur par la géométrie, donc on n'a pas de problèmes avec l'interaction entre les senseurs. La plage dynamique linéaire est déterminée par la grandeur de la photodiode, typiquement plusieurs millimètres, ce qui convient bien avec les mouvements maximum des masses-test. La linéarité est limitée par l'uniformité de l'éclairage dans le plan de la photodiode.

Autres méthodes : Nous allons brièvement mentionner plusieurs autres moyens qui ont été considérés pour détecter la position des masses-test.

—Le phénomène de l'effet Foucault, c'est à dire la tension induite dans une inductance quand elle 'coupe' des lignes de force magnétiques, permet une mesure de la vitesse d'un aimant par rapport à une self. Cette même self et ce même aimant peuvent être utilisés pour exercer la force d'amortissement (voir la sous-section *Moyens de contrôle*). Ce système a plusieurs désavantages. On n'a pas une mesure de la position, mais seulement de la vitesse, ce qui limite les applications à l'amortissement. Un pont électrique pour séparer les signaux de contrôle (les courants) des signaux de vitesse (les tensions) est nécessaire, qui devrait être équilibré inductivement et résistivement, car montrant une dépendance forte avec la température. On mentionne finalement le fait qu'il est difficile à blinder contre les champs magnétiques venant du secteur.

—Un système alternatif lumineux d'un faisceau laser réfléchi par un miroir qui est monté sur la masse-test, qui ensuite tombe sur une photodiode sensible à la position. Une rotation est détectée avec un miroir plan, et une translation avec un miroir dièdre (dans l'axe de rotation). La sensibilité fondamentale, qui est limitée par la grandeur du faisceau et le bruit de grenaille, est comparable à celle du système diode électroluminescente et photodiode simple. Cependant, on a plusieurs problèmes liés au laser, qui est normalement un laser He-Ne simple où

une diode laser. Les sauts de mode et la compétition des modes produisent du bruit d'amplitude et de position. Le laser doit être en général à l'extérieur de l'enceinte à vide, donc on a aussi une sensibilité acoustique. Enfin, la grande longueur de cohérence électroluminescente pourrait mener à des effets d'interférence; toute réflexion accidentelle doit être évitée. Beaucoup des problèmes pourraient être résolus avec un système d'injection de la lumière par fibre mono-mode et un laser stabilisé, mais la complexité résultante n'est pas attractive.

Par contre, on peut profiter de la grande longueur de cohérence électroluminescente d'un laser en faisant une mesure interférométrique. Si l'augmentation de la sensibilité était intéressante, la complexité des modulateurs optiques, de l'électronique pour compter les franges, et la nécessité d'aligner, pourraient valoir la peine. Ce système a aussi l'avantage qu'on n'influence pas la masse-test avec la mesure; la surface de la masse-test même, polie et traitée, pourrait être la partie du senseur sur la masse.

Pour l'amortissement actif, où on exige un bon rapport signal sur bruit seulement autour de la résonance pendulaire, une telle augmentation de la sensibilité n'améliorerait pas le fonctionnement du système.

Moyens de contrôle

Généralités : Les moteurs fonctionnent en exerçant une force sur les masses-test. La force nécessaire pour faire un amortissement critique peut être calculée. On demande que le système d'amortissement soit capable d'enlever toute l'énergie stockée dans le pendule durant une demi-période. Si a est l'amplitude de l'oscillation, on a

$$\begin{aligned} F \cdot a &= E_p \\ &= \frac{M_p g}{l_p} \cdot a^2 \end{aligned}$$

où

$$F = \frac{M_p g a}{l_p}$$

L'amplitude a est d'abord énorme, à cause de la surtension élevée Q_p du pendule sans amortissement. Cependant, dans l'état stationnaire, le pendule a une surtension effective égale à peu près à l'unité, nécessitant seulement les forces très petites.

Pour un exemple numérique, prenons la maquette de Garching. On a: $M_p = 1.1$ kg, $\omega_0 = 2\pi \cdot (0.7 \text{ Hz})$, $Q_p = 10^4$, et le bruit sismique caractérisé par $\tau_t \approx$

$10^{-7}/f^2 \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$. Cela donne $a \approx 0.2 \text{ mm}$ sans amortissement actif, et une force de $F \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ serait nécessaire pour amortir critiquement le pendule dans une seule demi-période. Dans l'état stationnaire, on trouve $a \approx 10^{-7} \text{ m}$, donc $F \approx 7.5 \cdot 10^{-6} \text{ N}$.

Les contrôleurs peuvent aussi être utilisés pour faire les positionnements fins des masses-test. La force nécessaire est une fonction du système optique et des systèmes de positionnement grossiers. En général, on peut dire qu'il faut faire un mouvement x_{adj} sur un oscillateur (un pendule, ou peut-être une résonance rotative) de masse M et de fréquence f . La force exigée, dans l'état stationnaire, est

$$F = M(2\pi f)^2 \cdot x_{adj} .$$

Pour la maquette de Garching, un mouvement d'à peu près 0.05 mm sur les oscillateurs de masse 1.1 kg et de fréquence d'oscillation de 1 Hz est nécessaire. La force nécessaire est $5 \cdot 10^{-4} \text{ N}$; ceci est évidemment suffisant pour l'amortissement actif en régime stationnaire, et pour le cas où le pendule doit être amorti après une excitation exceptionnelle les quelques périodes nécessaires pour arriver au but ne sont pas gênantes.

La troisième application des moteurs est, en tant qu'élément de l'asservissement des interféromètres, ce qui est discuté en plus de détails dans la section *Détection de signal*. Il est difficile de donner un chiffre pour la force maximale nécessaire, celle-ci étant une fonction du système optique. Aussi importante ici est la rapidité de réponse; chaque situation doit être considérée séparément.

Bien que les moteurs même ne produisent pas un bruit important, les amplificateurs qui précèdent doivent être considérés. Il y a deux régimes d'intérêt. Autour de la résonance pendulaire, le signal est beaucoup plus grand que le bruit, et en général, il n'y a pas de problèmes. Autour des fréquences d'intérêt astrophysique, le bruit blanc de l'amplificateur exerce une force aléatoire F_b sur la masse-test, et on demande que le mouvement qui en résulte soit plus petit, soit que le mouvement sismique résiduel, soit que le bruit de photons. Le mouvement suit la loi de Newton, c'est à dire $x = F_b/M_p\omega^2$, et il est intéressant de faire le rapport entre la force nécessaire pour l'alignement F_a et la force maximale venant du bruit électronique qui est permise pour une fréquence de mesure ω donnée :

$$\frac{F_a}{F_b} = \frac{x_{adj} \omega_0}{x_b \omega} .$$

Pour la maquette de Garching, on trouve un rapport de 10^{10} pour $\omega = 2\pi \cdot (100 \text{ Hz})$. Par ailleurs, le moteur peut coupler le mouvement sismique à la masse-test s'il y a un gradient de force entre le moteur et la masse-test.

La plage dynamique devrait permettre la capture des masses-test quand l'asservissement est d'abord activé, donc à peu près un millimètre de plage est exigé. Il n'est pas important que l'asservissement soit linéaire dans ce régime, mais seulement que la boucle d'asservissement puisse réagir avec le bon signe; donc, le moteur devrait donner une force monotone. Il doit tolérer (et effectuer!) les mouvements nécessaires pour l'alignement optique; plusieurs centaines de microns sont nécessaires.

D'autres considérations sont: l'isolation des moteurs des effets venant de l'extérieur et des moteurs adjacents, et la nature de la partie du moteur montée sur la masse-test. Il faut que cette dernière n'introduise pas de complications mécaniques.

Moteur électrostatique: Le principe du moteur électrostatique repose sur la force entre deux corps ayant une différence de potentiel; voir la figure 2C5. Cette force est donnée par

$$F_e = -\frac{\epsilon_0}{2} \frac{A}{x_s^2} V^2$$

où ϵ est la permittivité du vide, A est la surface de la lame moteur, x_s la distance statique à l'équilibre entre le moteur et la masse-test, et V la tension entre les deux surfaces. Normalement, la masse-test est au potentiel de la masse électrique, et une polarisation permanente est nécessaire pour permettre des forces dynamiques attractives et répulsives. Autour de ce point d'équilibre entre la force gravitationnelle et la force électrostatique, il y a une région de stabilité. Cependant, si la masse vient trop près de la lame contrôleur, la force électrostatique peut devenir trop forte, et la masse peut être piégée sur la lame contrôleur. C'est cette région de stabilité qui donne la plage dynamique.

La dérivée de la force par rapport à la tension donne la sensibilité du moteur:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_e}{\partial V} &= -\frac{\epsilon_0}{4} \frac{A}{x_s^2} V \\ &= \frac{F_e}{2V}. \end{aligned}$$

Notons la forte dépendance en x_s , la distance statique entre la lame moteur et la masse-test. Les mouvements sismiques sont petits par rapport à x_s , mais le

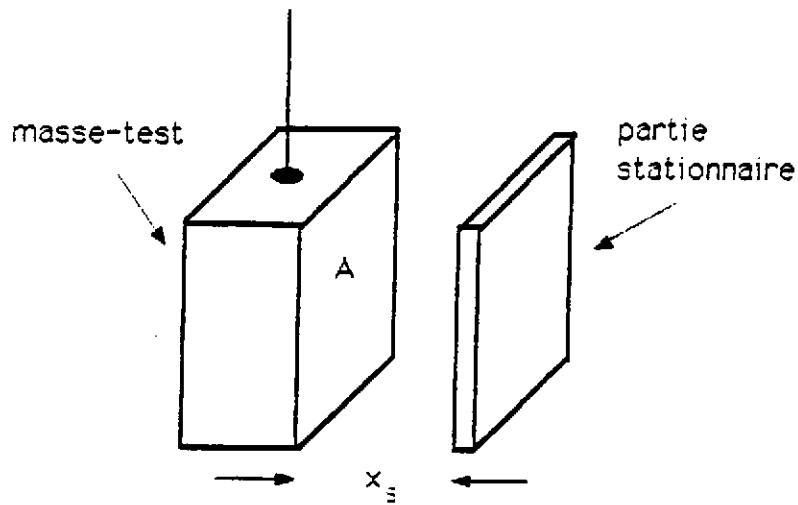


Figure 2C5 : Moteur électrostatique

gain dans la boucle d'amortissement actif peut subir des changements si le système optique est réaligné. A ce point on peut calculer aussi le rapport entre le bruit électrique V_b et le mouvement de la masse x_b :

$$x_b(\omega) = -\frac{\epsilon_0 A V}{4x_s^2 M_p \omega^2} \cdot V_b$$

L'effet sur la masse-test du mouvement sismique de la lame moteur est donné par la dérivée de F_e par rapport à x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_e}{\partial x} &= -\frac{3\epsilon_0}{2} \frac{A}{x^3} V^2 \\ &= -\frac{3F_e}{x_s} \end{aligned}$$

Cette force cause un mouvement de la masse x

$$x = \frac{3F_e}{x_s M_p \omega^2} \cdot x_{sism}(\omega)$$

pour un mouvement $x_{sism}(\omega)$ de la lame moteur. Le fait qu'il y ait une sensibilité au premier ordre est un fort désavantage de ce moteur. Une géométrie différente pour les lames du condensateur peut réduire cet effet; par exemple, on peut monter sur la masse une lame parallèle à la direction de mouvement qui passe entre deux

lames stationnaires, à la façon d'un condensateur variable, mais le coût est une complexité mécanique peu attrayante sur la masse-test.

La direction de la force exercée par le moteur est principalement une fonction de l'écart entre la lame moteur et la masse-test : si elles ne sont pas bien parallèles, il y aura un couple exercé sur la masse-test. A cause de la forte dépendance de la force en fonction de l'écart, les mouvements nécessaires pour l'alignement optique suffisent à rendre cet effet important. Il peut, et doit être corrigé avec un système de couplage entre les senseurs et les moteurs.

Il est relativement facile de blinder un moteur électrostatique par rapport à un autre avec une 'bande de masse'. De la même façon, le moteur est bien blindé contre les champs électriques externes par l'enceinte à vide.

Malgré la liste longue des désavantages de ce moteur (consistant en une couche mince conductrice), le fait que la complexité mécanique sur la masse-test soit minimale et qu'il ne soit pas sensible aux champs magnétiques, en fait un bon candidat pour les grandes antennes.

Moteur magnétique: Le moteur magnétique utilise l'autre force facilement disponible. Un schéma mécanique de notre réalisation est montré dans la figure 2C6 : un petit aimant permanent AP est monté sur la masse-test, dans le champ d'un électro-aimant EA monté sur la surface de référence. La force axiale est maximale là où le gradient du champ magnétique est maximum. Il est facile de calculer cette force pour deux électro-aimants d'une seule boucle chacun. Dans un cas réaliste, l'électro-aimant a une longueur et une épaisseur importantes, et l'aimant permanent une longueur non-nulle. Donc on fait un calcul numérique, superposant plusieurs boucles pour chacun les deux éléments; on peut ainsi calculer la dépendance de la force en fonction de la distance bobine-aimant. La courbe correspondante apparaît dans la figure 2C7. On caractérise la sensibilité par un coefficient v , en unités de $N \cdot A^{-1}$.

Notons qu'on peut créer une attraction ou une répulsion en changeant le signe du courant dans la bobine. Donc aucune polarisation n'est nécessaire. Notons aussi que si on reste sur le sommet de la courbe de force, on a une indépendance au premier ordre de la force appliquée par rapport au mouvement relatif entre l'aimant et la bobine. En fait, ce couplage du mouvement de l'électro-aimant à la force sur la masse reste assez petit pour une grande gamme de positions, et c'est ce qui donne la plage dynamique pratique de ce moteur. On peut faire

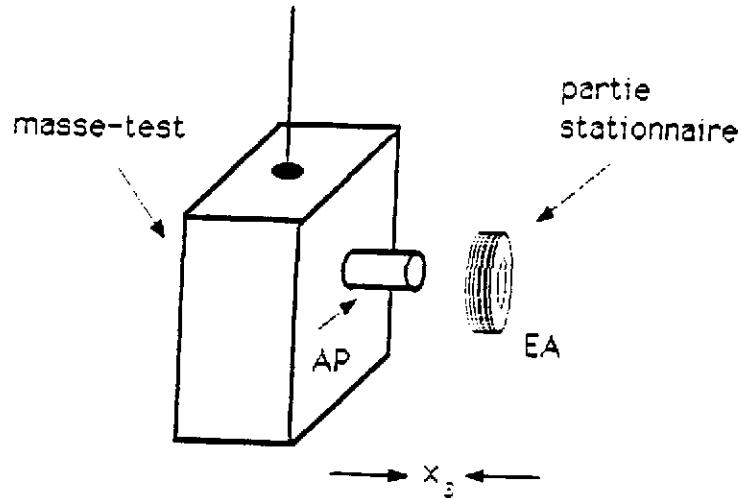


Figure 2C6: Moteur magnétique

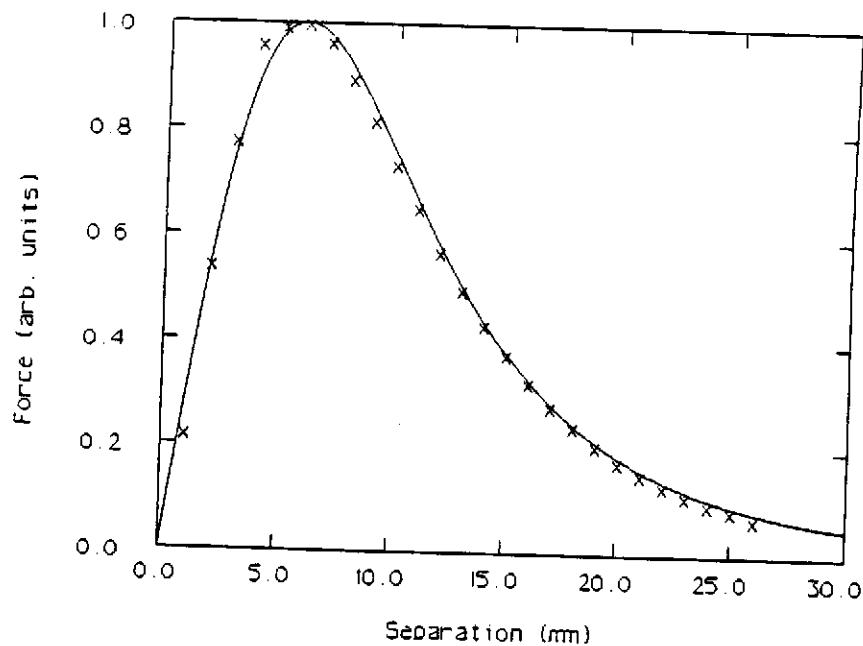


Figure 2C7: Courbes, expérimentale et calculée, pour la force magnétique entre la bobine et l'aimant, en fonction de leur séparation

un développement analytique parabolique autour du maximum de la force pour chiffrer cet effet, par exemple :

$$F_m \approx \alpha F_0 [1 - (x_s - x_0)^2]$$

ce qui cause un mouvement de la masse-test de

$$\tilde{x} \approx 2\alpha F_0 (x_s - x_0) \cdot \frac{\tilde{x}_{sis}(\omega)}{M_p \omega^2}$$

Normalement, cela donne une plage plus grande que nécessaire, c'est à dire plus grande que les senseurs ou que la plage d'ajustement optique. La force croît paraboliquement hors de l'axe du système, ce qui amène quelques restrictions sur l'alignement entre la self et l'aimant.

Un effet Foucault involontaire, présent si on n'est pas sur le sommet de la courbe de la force, ou s'il y a un courant continu à travers la self, est une deuxième façon par laquelle un mouvement sismique pourrait être couplé à la masse test. La tension résultante quand il y a un mouvement relatif entre l'électro-aimant et l'aimant fixé sur la masse-test fait un courant proportionnel à l'impédance de la source de courant employée pour contrôler l'électro-aimant. Donc, on veut une impédance très forte. Pour déterminer la grandeur de cet effet, on mesure la tension sur l'électro-aimant pour un déplacement du sommet de la force connu, et une vitesse connue (par exemple, un mouvement pendulaire d'amplitude connue). Avec l'impédance de la source de courant, et la constante de sensibilité v , ce couplage peut être prévu.

Parce qu'il est pratique de prendre les tensions normales (± 15 V) pour l'alimentation du dernier étage d'amplification avant la bobine, on a des difficultés à faire une plage dynamique suffisamment grande du courant dans la self, et simultanément à maintenir un niveau de bruit suffisamment petit. On demande un rapport d'à peu près 10^{10} entre le courant maximal et le courant de bruit (voir ci-dessus), ce qui exige par exemple un bruit de 1 nV avec une tension possible de 10 V. On peut améliorer la situation avec un filtre passe-bas avant la self, mais cette solution a un coût : ce filtre figure dans toutes les boucles d'asservissement utilisant ce moteur.

Un grand désavantage de ce moteur reste dans le fait qu'il utilise les champs magnétiques : il est donc difficile à blinder. Cela détermine l'écart minimal entre les moteurs, pour éviter des interactions moteur-moteur. En plus, la présence

d'aimants sur la masse-test donne une sensibilité aux fluctuations du champ magnétique. Un autre problème est associé avec les aimants permanents; il peut se produire des changements dans le volume des domaines magnétiques, induits par un changement dans le champ magnétique faible externe ('bruit de Barkhausen'). Etant aléatoire et de statistique non-Poissonniene, il serait très difficile à distinguer des vrais signaux (ou bien de plusieurs autres bruits).

Un deuxième désavantage est qu'il faut monter les aimants sur la masse-test. Bien que la rapport masse aimant-masse-test soit très petit, l'homogénéité de la masse du point de vue des résonances mécaniques est cassée. Cela complique le spectre des fréquences de résonance et risque de diminuer le coefficient de surtension.

Cependant, ce moteur est très facile à mettre en œuvre et les désavantages ne sont pas fatals pour les applications sur les maquettes et aussi sur les premiers étages des pendules multiples des futures grandes antennes. Il est certainement le système qui convient le mieux pour les maquettes.

Systèmes réalistes

Pont capacitif, moteur électrostatique

Le système décrit ici est celui qui était projeté et qui a été installé sur la maquette 1.3 m de MIT. Une résumé et plusieurs détails sur l'asservissement sont donnés dans l'article *Low noise rf capacitance bridge transducer*, qui est annexé à la fin de la section.

Intégration des senseurs-contrôleurs : La figure 2C8 est une esquisse d'une lame senseur-contrôleur à deux canaux. La méthode de construction employée est l'évaporation de cuivre sur le verre. Les espaces d'isolation entre les conducteurs sont délimités avec une bande adhésive avant l'évaporation, qui est enlevée après. Le résultat, une sorte de circuit imprimé, a plusieurs caractéristiques agréables: stabilité mécanique et thermique, bonnes propriétés diélectriques, et propriétés excellentes pour le vide. Les surfaces senseur et moteur sont interfoliées dans le but de mettre le point de mesure et le centre de force au même point, et les deux canaux sont isolés par une bande conductrice reliée à la masse.

La connection électrique entre les senseurs-contrôleurs et l'électronique est faite avec un câble coaxial rigide pour éviter les changements de capacité. Pour

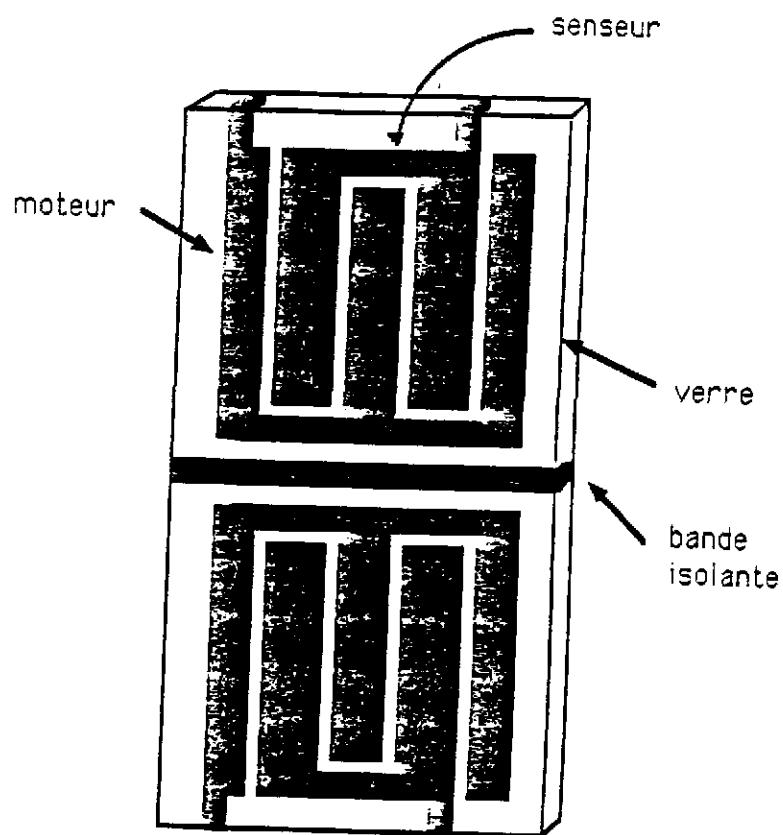


Figure 2C8 : Senseur capacitif-contrôleur électrostatique intégrés

que la capacité fixe soit minimisée, la longueur des câbles est minimisée, et on a choisi une impédance caractéristique aussi grande que possible (93 Ohms).

Une esquisse fonctionnelle de l'électronique pour un canal complet est montrée dans la figure 2C9. Elle est réalisée dans trois tiroirs 'NIM', utilisant les techniques classiques des circuits imprimés. On peut trouver une discussion du fonctionnement électronique dans l'article *Low noise rf capacitance bridge transducer*, qui est joint en annexe.

Réalisation du système multi-canal : Trois lames qui ressemblent à celle de la figure 2C8 sont combinées pour faire un système à six voies, capable de faire un amortissement actif de tous les degrés de liberté d'une masse-test; voir la figure 2C10. La masse-test est un prisme rectangulaire, et est mise à la masse électrique.

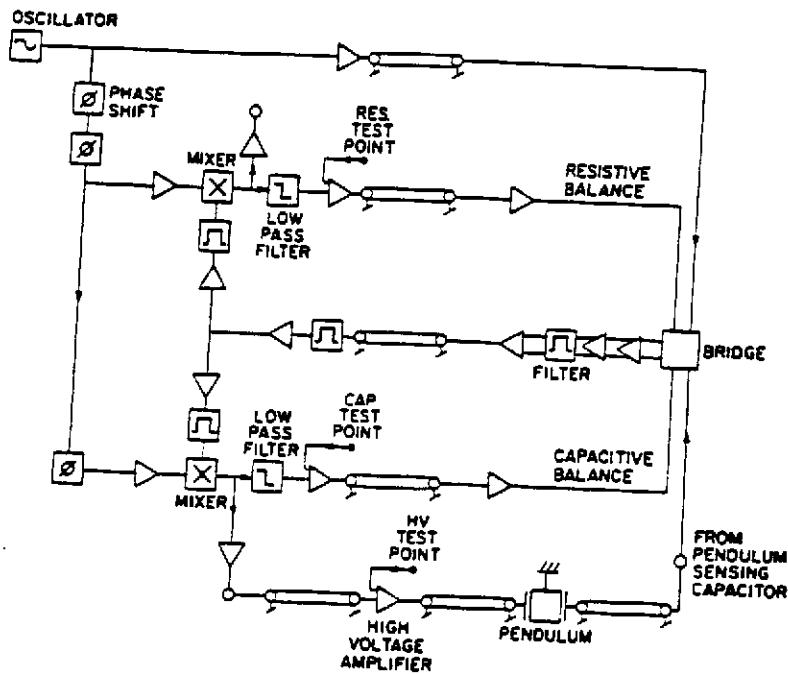


Figure 2C9: Schéma fonctionnel de l'électronique pour le système capacitif électrostatique

Pour chaque lame, c'est à dire pour chaque paire de voies, les signaux des senseurs rentrent dans une matrice de quatre potentiomètres qui permet de distribuer aux moteurs les tensions ayant l'amplitude et le signe corrects. Le gain peut être ajusté afin de faire un amortissement critique. Il aurait été possible de faire une 'orthogonalisation' complète, avec une matrice 6×6 , mais les termes croisés entre les axes $x - y$, $y - z$, et $z - x$ sont négligeables. Le besoin d'une entrée qui produit une translation simple est satisfait par une voie d'entrée, équipée avec un potentiomètre d'équilibre qui est ajoutée aux signaux pour les moteurs agissant sur l'axe optique. Le système optique de la maquette de MIT est tel que l'alignement interférométrique est, au premier ordre, indépendant de l'orientation

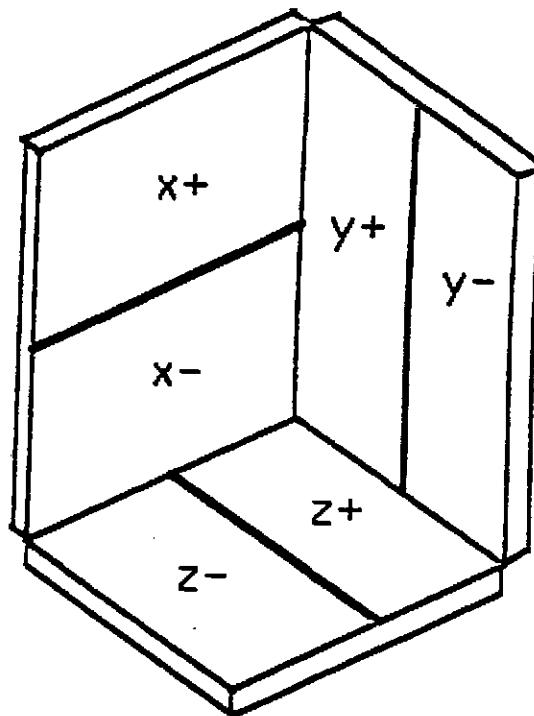


Figure 2C10: Ensemble multi-canal du système senseur capacitif - contrôleur électrostatique

des masses-test, et il n'était pas prévu de possibilité d'alignement. Une radio-fréquence ω_{rf} différente pour chaque canal, entre 1 et 10 MHz, évite le problème potentiel d'un couplage électrique entre les canaux.

Caractéristiques techniques: La sensibilité du pont capacitif est limitée par le bruit des transistors RF qui mesurent le déséquilibre du pont. Avec les chiffres typiques de $e_b = 6 \cdot 10^{-9} \text{ V} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$, $V_{rf} = 40 \text{ V}_{\text{p-p}}$, $A = 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $x_s = 1 \text{ mm}$, et $C_c = 110 \text{ pF}$, on arrive à une sensibilité de $x_b = 2 \cdot 10^{-13} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$.

La surface A et l'écart x_s sont les mêmes pour le moteur et pour le senseur. La tension de polarisation est $V = 400 \text{ V}$, ce qui donne $2 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{V}^{-1}$ pour la sensibilité. La plage dynamique donnée par la gamme de stabilité dans le champ électrique est 1 mm, mais la limite la plus sévère vient du varactor, qui est $30 \mu\text{m}$. Pour la maquette de MIT, la masse de la masse-test est 8 kg; avec le bruit sismique 'canonique', le couplage entre la lame moteur et la masse-test donne un mouvement

de la masse-test de $1.5 \cdot 10^{-17} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$ à 100 Hz, un niveau trop élevé pour les meilleures maquettes.

Senseur occultation, moteur magnétique

Le système discuté ci-dessous a été étudié pour la maquette de 30 m de Garching; il sert aussi, avec des modifications mineures, sur les maquettes d'Orsay et de Glasgow.

Intégration des senseurs-contrôleurs: La figure 2C11 est une esquisse d'un senseur du type 'occultation de lumière incohérente' combiné avec un moteur du type 'magnétique'. Le corps de la partie stationnaire est en plastique noir opaque. La diode électroluminescente et la photodiode sont collées en place de tel sorte que leur axe optique traverse l'axe du corps plastique. L'électro-aimant est bobiné autour de l'axe du corps.

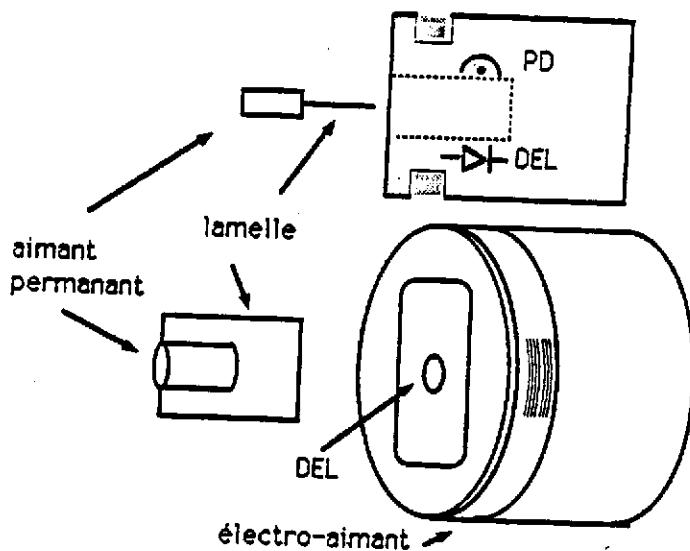


Figure 2C11: Détecteur du type 'occultation', intégré avec un contrôleur magnétique

La partie attachée à la masse-test consiste en un aimant permanent cylindrique, avec l'axe parallèle au corps stationnaire, et une lamelle de papier noir opaque, perpendiculaire à l'axe optique de la diode électroluminescente et de la photodiode.

La partie électronique est réalisée dans des tiroirs à quatre canaux chacun; une esquisse du circuit se trouve dans la figure 2C12. Il y a une source de courant (CUR) pour les quatre diodes électroluminescentes dans les senseurs pour chaque tiroir. En plus, une diode électroluminescente de référence (LEDREF) est alimentée; cette lumière tombe sur une photodiode de référence (PDREF), faisant un courant de référence. Le courant venant de la photodiode de mesure est comparé avec cette référence dans l'amplificateur d'entrée (INAMP) pour annuler partiellement le bruit dans la source de courant. Un contrôle de gain et les filtres passe-bas suivent. Le dernier étage (OUTAMP) est une source de courant à bas bruit et de forte impédance, avec entrées multiples pour les fonctions d'alignement et pour la boucle d'asservissement optique. Une alimentation bas-bruit ± 15 V est sur chaque carte.

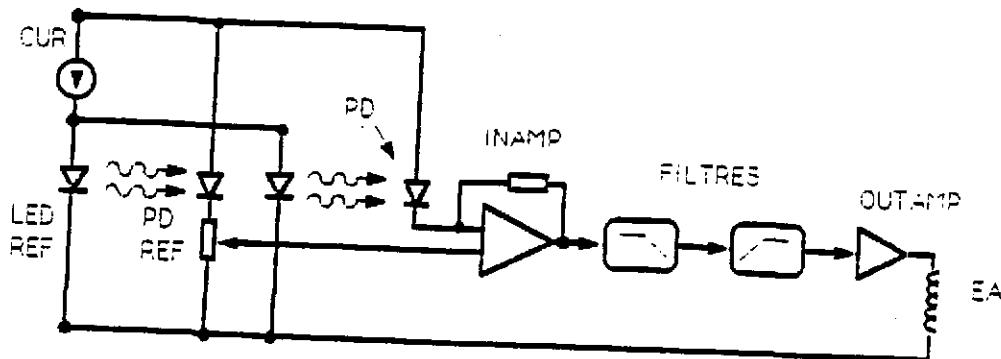


Figure 2C12 : Electronique pour le système de détecteur du type 'occultation' avec un contrôleur magnétique

Réalisation du système multi-canal: Voir la figure 2C13. Trois des unités décrites ci-dessus sont montées derrière la masse-test, dans un plan perpendiculaire à l'axe optique de l'interféromètre. Une quatrième unité mesure et contrôle le mouvement horizontal transverse de la masse-test. La position de chaque unité peut être ajustée pour que la lamelle et l'aimant soient bien centrés sur les deux axes critiques du senseur-moteur. Il a été jugé inutile d'appliquer l'amortissement actif à la rotation autour de l'axe optique de l'interféromètre, ainsi que dans le sens vertical.

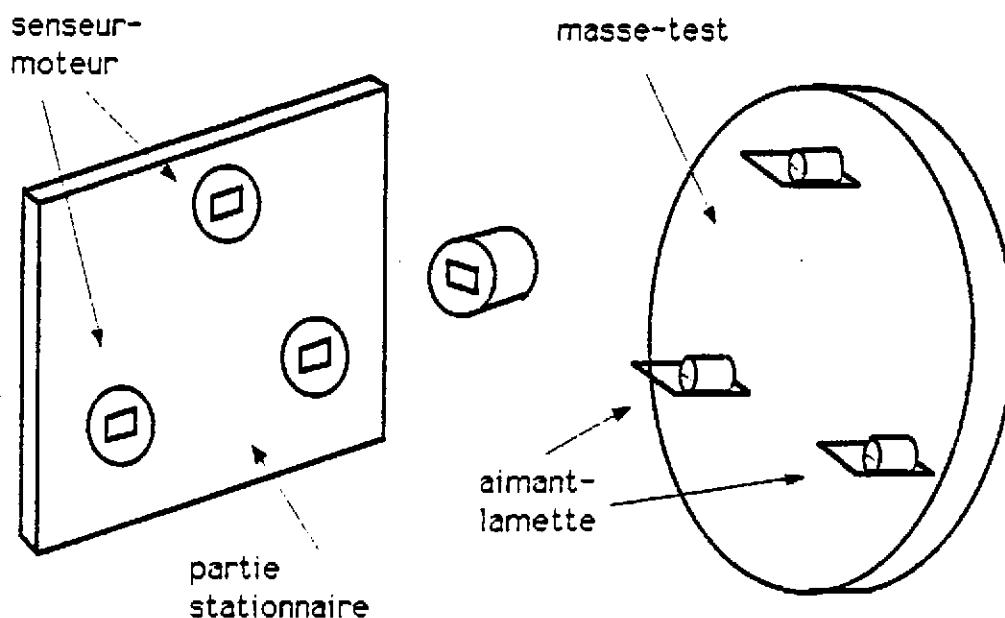


Figure 2C13: Système multi-canal utilisant un détecteur du type 'occultation' avec un contrôleur magnétique

Parce que l'axe de mesure et l'axe de la force exercée sont bien alignés, aucune 'matrice d'orthogonalisation' n'est nécessaire. Afin de permettre une facilité d'alignement optique de l'interféromètre, un circuit de transformation qui donne les deux rotations de la masse-test sur les commandes des potentiomètres a été réalisé. Il existe en plus une entrée de translation simple.

Caractéristiques techniques: La sensibilité du senseur est limitée au dessus de 100 Hz par le bruit de grenaille; pour la géométrie employée, et avec le courant de la photodiode de $75 \mu\text{A}$, on trouve $1.5 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$ dans le milieu de la plage. La plage dynamique maximale est 4 mm. Autour de 0.7 Hz, le bruit est de $5 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$, à cause de plusieurs sources de bruit en $1/f$.

L'électro-aimant est une bobine de mille tours de cuivre, de 0.1 mm de diamètre, ce qui donne une inductance de 45 mH et une résistance de 200Ω . Cette résistance limite avec la tension disponible de 13 V le courant maximal possible (6.3 mA). L'aimant permanent a 3 mm de diamètre, et 5 mm de longueur; il est fait en ferrite, avec une base de céramique. Le rapport force-courant v est $4.7 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{A}^{-1}$, donc la force maximale disponible est $3 \cdot 10^{-4} \text{ N}$. La source de courant pour le moteur a un bruit blanc de $10^{-11} \text{ A} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$, donnant un mouvement de la masse-test (de 1.1 kg) à 100 Hz de $1.1 \cdot 10^{-18} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$.

Quant au couplage du mouvement sismique à la masse-test, la figure 2C7 montre la courbe pour ce système. Le coefficient α résultant est $3.3 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{N} \cdot \text{t}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$; pour des valeurs pessimistes, on induit un mouvement de $10^{-26} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$ à 100 Hz. L'autre couplage au mouvement sismique vient de l'effet Foucault. L'impédance de la source de courant est supérieure à 10^6 Ohms, et le coefficient de tension induit dans l'électro-aimant pour une vitesse relative entre l'électro-aimant et l'aimant permanent est $4 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$, encore pour des valeurs pessimistes. La vitesse sismique peut être caractérisée par $v_{sism}(f) \approx 2\pi \cdot 10^{-7} / f^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{s}^{-\frac{1}{2}}$. Il en résulte, par exemple, un mouvement de la masse-test de $3 \cdot 10^{-20} \text{ m} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$ à 100 Hz.

Conclusions

Les deux senseurs discutés en détail sont assez sensibles pour l'application à l'amortissement actif, mais la complexité et la faible plage du senseur électrostatique rendent le senseur optique préférable. Les moteurs avec champs magnétiques sont idéaux pour les maquettes, mais les forces électrostatiques ont plusieurs avantages importants pour les grandes antennes.

Low-noise rf capacitance bridge transducer

Paul S. Lindsay and David H. Shoemaker

Department of Physics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139

(Received 29 October 1981; accepted for publication 15 March 1982)

We have designed a low-noise servo system to both damp the motion of a high Q pendulum as well as measure the ground noise that drives it. The servo is based on a high-frequency low-noise capacitance bridge which is used as a displacement transducer for sensing the position of the pendulum. The bridge itself is servoed to minimize the need to adjust its components because of slow mechanical thermal drifts. Used as a displacement transducer we have achieved a position sensitivity of $4 \times 10^{-11} \text{ cm}/\sqrt{\text{Hz}}$.

PACS numbers: 06.30.Ft

INTRODUCTION

We are currently building a free-mass Michelson laser interferometer which will be used as an antenna to search for gravitational radiation.¹ A wave of gravitational radiation passing through the interferometer will set up a strain field which simultaneously lengthens one arm of the interferometer and shortens the other. The greatest sensitivity is achieved if the end mirrors of the apparatus are mounted on masses which are free to move in inertial space. In our current design, we have accomplished this by suspending each mass on a pendulum with a large quality factor (Q). The mass is free in inertial space at frequencies well above the natural frequency of the pendulum.

This suspension also serves to isolate the mass from seismic and thermal noise. This works well except for noise which has frequency components close to the resonance frequency of the pendulum. These components can induce very large amplitude motions in the pendulum. We have solved this problem by building a low noise electronic servo system to damp the pendulum resonance. With the resonance damped, the system behaves as if the mass were locked to the point of support at low frequencies and free to move at high frequencies. The servo can be thought of as an electronic refrigerator. With the servo turned on, the rms motion of the pendulum is equivalent to the motion of an undamped pendulum at a few degrees Kelvin. The "cooling" is limited by the noise in the electronics which can drive the pendulum through the feedback network. A full discussion of the feedback and noise analysis is given in the Appendix.

The damping is performed by a low noise capacitive displacement transducer which operates at rf frequencies in the range 1–8 MHz. We chose this frequency range because of the availability of low noise components and the ability to use large bandwidths in the servo loop.

I. DESCRIPTION OF BRIDGE AND SERVO SYSTEM

A block diagram of the servo loop which damps the motion of the pendulum is shown in Fig. 1. Motion of

the sense capacitor produces an output from the bridge which is then fed back through a low-pass filter in order to balance the bridge electronically. The electronic balancing minimizes the need to readjust the bridge balance due to slow changes in the values of the bridge components other than the sense capacitor. The output drives a high-voltage amplifier and damping capacitor which damps the motion of the pendulum.

The poles and zeroes needed for stable damping of the pendulum motion are generated by the low-pass feedback loop around the bridge which behaves essentially like a phase-lead network. The behavior of the servo is determined by the two loop gains, the bridge-high-voltage amplifier gain G_D , the bridge-filter gain G_F , and by the time constant of the low-pass filter. These three parameters were chosen so that the pendulum motion in inertial space was minimized. Care was taken in setting these parameters to ensure that pendulum motion caused by the electronic noise in the circuit was less than that due to the ground noise at all frequencies.

A functional block diagram of the bridge circuit and its associated electronics is shown in Fig. 2. The oscillator provides a common drive signal for the bridge cir-

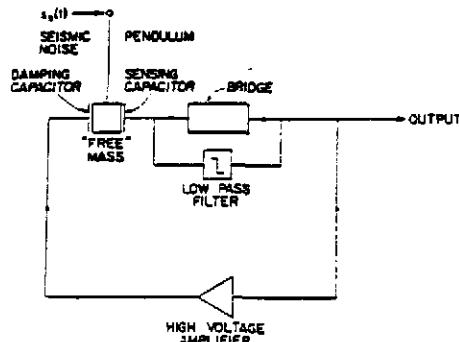


FIG. 1. Block diagram of the servo loop.

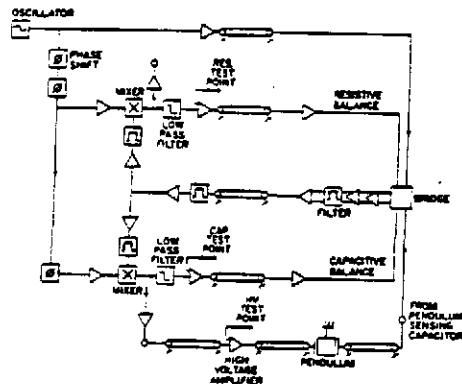


FIG. 2. Functional diagram of the bridge.

cuit and the mixers. Displacement of the pendulum from equilibrium produces a change in the value of the sense capacitor. This in turn creates an ac signal at the carrier frequency at the bridge output which is amplified by the two low noise rf differential preamplifiers. The signal is then amplified through two more stages of bandpass filter and rf gain. The bandpass filters are needed to eliminate harmonics of the oscillator frequency generated by nonlinear elements in the bridge. If these harmonics were not removed they would saturate the later stages of amplification. The bridge signal is then split in two and shifted to audio frequencies in a double balanced mixer. Each mixer input is preceded by a bandpass filter and buffer amplifier to prevent harmonics of the local oscillator (L.O.) from leaking back into the circuit. The phase of one mixer L.O. is set to be in phase with a bridge signal caused by a change in bridge capacity. The output of this mixer is then used to null any capacitive imbalance of the bridge. This output is also used to drive the high-voltage amplifier which in turn damps the pendulum oscillations. The second mixer is driven 90° out of phase

with respect to the first and its output is used to offset changes in the resistive balance of the bridge. In both cases the mixer output is fed back to the bridge through a low-pass filter as described above, for correct operation of the servo loop.

The actual physical circuit is mounted on three printed circuit boards designed to fit in NIM modules. One board contains the bridge circuit, three stages of rf amplification and filtering, one stage of audio feedback, and low noise power supplies. The circuit diagram for this board is given in Fig. 3. The rf bridge drive is applied to the bridge through a 6:1 step-up transformer and provides about 80 V peak-to-peak to the bridge elements. The bridge is put into coarse balance by using the mechanically tuned capacitors and resistors. Fine balance and electronic feedback are maintained by the voltage controlled capacitor (IN5470A) and the voltage variable resistor (VCR7N). The bridge imbalance signal is coupled out through a 1:1 transformer and then amplified by an FET differential amplifier. The U431 matched pair was chosen for its large transconductance and consequent low noise at rf frequencies. The measured equivalent input noise of this amplifier is 1.5×10^{-14} V/Hz $^{1/2}$. The gain of this amplifier is large enough so that its input noise is the dominant source of electronic noise in the entire circuit. Both FET amplifiers are adjusted for maximum gain and common mode rejection. The bandpass filter elements are selected to give a Chebyshev response centered on the bridge drive frequency and a band pass of roughly 0.5 MHz.

Figure 4 shows a circuit diagram of the second board. This board contains the primary oscillator, bridge and mixer drives, phase shifters, mixers, two stages of rf gain and filtering, audio gain and filters, and low noise power supplies. The rf filter components were chosen to have the same characteristics as the rf filter on the bridge board. The audio frequency buffer CA3140 is an op-amp with FET inputs and low input bias current. This prevents unacceptably large offset voltages from being generated by the high impedance, low-pass filter which precedes it.

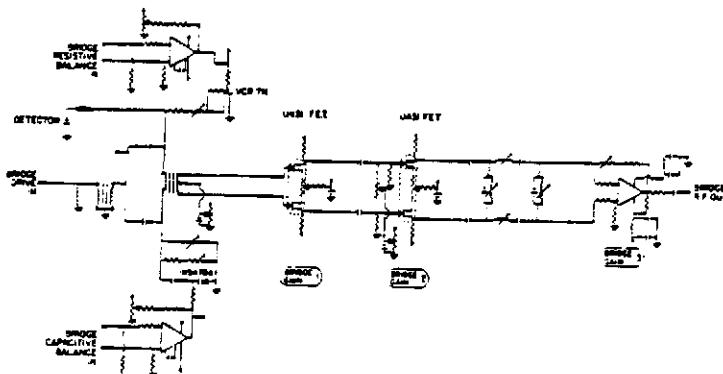


FIG. 3. Bridge-circuit diagram.

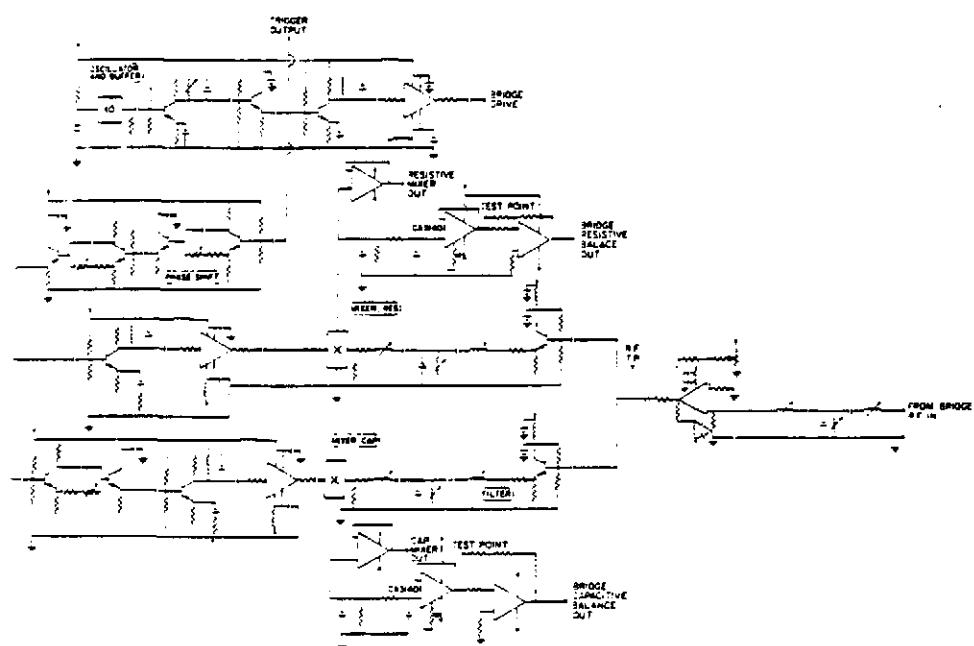


FIG. 4. Mixer, oscillator, and driver-circuit diagram.

A test point is provided at the last stage of audio gain for both the capacitive and resistive loops. The closed loop transfer function of either loop is easily checked by injecting white noise at this point and measuring the circuit response at the mixer output.

The high-voltage amplifier (Fig. 5) is mounted on a third printed circuit board. From dc to roughly 10 Hz it behaves as an optically coupled transistor amplifier with a dynamic range of 600 V peak to peak. At higher frequencies the dynamic range rolls off and at frequencies

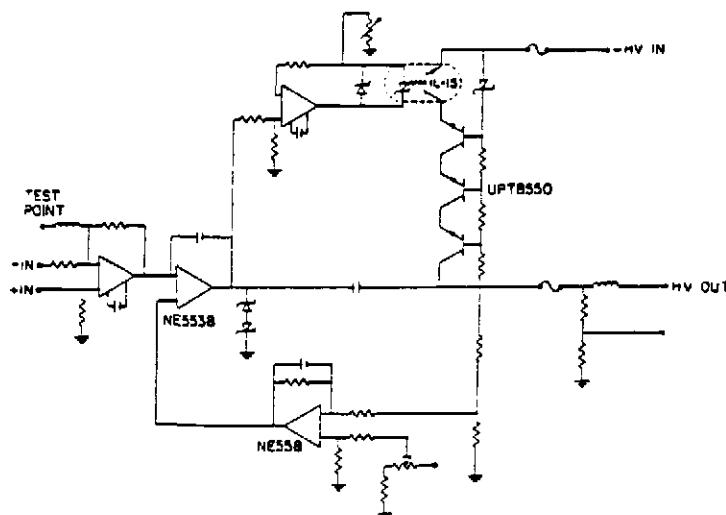


FIG. 5. High-voltage amplifier.

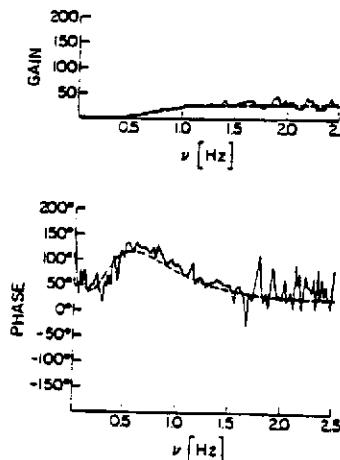


FIG. 6. Capacitive loop transfer function.

above 1 KHz the amplifier characteristics become those of the NE5538 op-amp. The dc output bias is continuously adjustable from 0 to -600 V. A test point is provided in order to test the closed loop response of the servo system.

The pendulum is an aluminized quartz rod 6 mm in diameter that supports a 10 kg aluminum mass. The sensing capacitor is made of the aluminum mass held at ground potential and a parallel pyrex plate with a copper electrode evaporated on its surface. The damping capacitor uses a separate electrode evaporated on the same

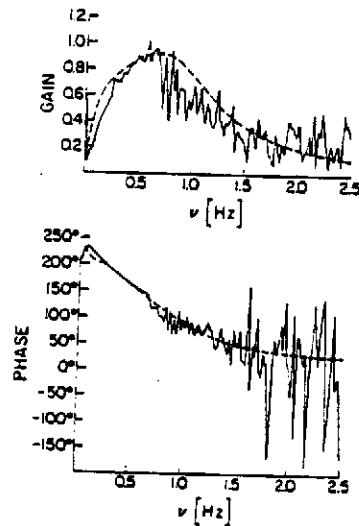


FIG. 7. High-voltage loop transfer function.

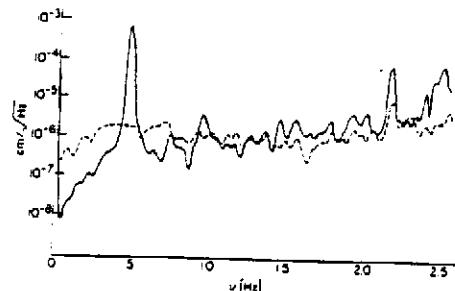


FIG. 8. Ground noise spectrum: the solid line is the undamped pendulum response, the dotted line is the damped response.

plate. The gap between electrode and mass is 1 mm. Since we are interested in damping both translations and rotations of the pendulum mass, two sensing electrodes and two damping electrodes are evaporated onto each plate. By taking sums and differences of the signals it is possible to sense and damp one degree of translational freedom and an orthogonal degree of rotational freedom with one set of four electrodes.

II. RESULTS

The servo was tested by setting G_T to 50, G_B to 6, and the low-pass filter time constant to 10 s. With both loops closed, white noise was injected successively into the capacitive test point and high-voltage amplifier. The response was measured with an FFT spectrum analyzer at the capacitive mixer output. The measured and predicted responses agree quite well as can be seen in Figs. 6 and 7. The suppression of the pendulum resonance is demonstrated in Fig. 8 which shows the damped and undamped response to local ground noise. The undamped response was measured with the high-voltage damping loop broken.

The position sensitivity of the bridge was measured by replacing the sensing capacitor with a micrometer driven

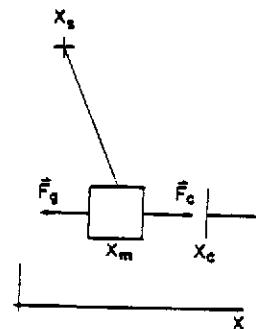


FIG. 9. Pendulum coordinate system.

This equation gives the relation between the mass-plate separation, the signal voltage, and the motion of the support point which is identical with the ground motion. The inertial position of the mass is related to these variables by

$$X_M(s) = \left(d\omega_0^2 \phi(s) + \left(\omega_0^2 + \frac{\omega_0}{Q} s \right) X_i(s) \right. \\ \left. + \frac{F_i(s)}{M} \right) \left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2 \right)^{-1}.$$

These equations are needed to describe the transfer function of the feedback loop. They show that at high frequencies ($|s| \gg \omega_0$) the differential motion between the mass and the plate follows the ground motion, whereas the inertial motion of the mass goes to zero in this limit.

B. Servo equations

Having derived the differential equations which relate pendulum motion to the ground noise and the damping capacitor potential it is straightforward to draw the signal flow graph for the entire servo system (Fig. 10). The graph can then be used to derive the characteristic equation of the servo and any transfer functions of interest. The characteristic equation of the servo is

$$1 + G_T \frac{\omega_1}{s + \omega_1} + G_D \frac{\omega_0^2}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2} = 0,$$

where

$$G_T = ab$$

$$G_D = \frac{dV}{dx} acd$$

are the dc loop gains in the system. The behavior and stability of the system as a function of G_T and G_D can be studied by applying root-locus techniques to this equation.

The most important transfer functions relate the pendulum motion to the ground noise [$X_i(s)$],

$$T_1(s) = \frac{X_M(s)}{X_i(s)} \\ = \omega_0^2 (1 + G_D) \frac{s + \omega_1 [1 + (G_T)/(1 + G_D)]}{(s - \omega_a)(s - \omega_b)(s - \omega_c)}$$

to the electronic noise [$N(s)$],

$$T_2(s) = \frac{X_M(s)}{N(s)} = - \frac{G_D}{dV/dx} \omega_0^2 \frac{s + \omega_1}{(s - \omega_a)(s - \omega_b)(s - \omega_c)}$$

and to the thermal noise,

$$T_3(s) = \frac{X_M(s)}{F_i(s)} = \frac{1}{M} \frac{s + \omega_1}{(s - \omega_a)(s - \omega_b)(s - \omega_c)}$$

The quantities ω_a , ω_b , and ω_c are the roots of the characteristic equation. It is also of interest to understand how the damping capacitor potential $\phi(s)$ depends on the same input variables. We then get

$$T_4(s) = \frac{\phi(s)}{X_i(s)} = \frac{G_D}{d} \frac{s^2(s + \omega_1)}{(s - \omega_a)(s - \omega_b)(s - \omega_c)},$$

$$T_5(s) = \frac{(s)}{N(s)} = ac \frac{(s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2)(s + \omega_1)}{(s - \omega_a)(s - \omega_b)(s - \omega_c)},$$

and

$$T_6(s) = \frac{\phi(s)}{F_i(s)} = ac \frac{dV}{dx} \frac{s + \omega_1}{M(s - \omega_a)(s - \omega_b)(s - \omega_c)}.$$

C. System response to noise

It is now straightforward to calculate the response of the pendulum to the combined effects of the noise sources. Adding the three sources incoherently the power spectral density of the pendulum motion in inertial space is

$$|X_M(s)|^2 = |X_i(s)|^2 |T_1(s)|^2 + |N(s)|^2 |T_2(s)|^2 \\ + |F_i(s)|^2 |T_3(s)|^2.$$

Integrating this expression over all frequencies gives the rms motion of the pendulum. The thermal force density

$$|F_i(s)|^2 = 4kT M \omega_0 / Q$$

is that of the free undamped pendulum. This and the electronic noise are white noise spectra unlike the ground noise which decreases with frequency. As a result, the stochastic motion of the pendulum at high frequencies is entirely due to thermal noise and noise in the electronics. Since the transfer functions vary as $1/s^2$ at high frequencies the spectral density in this regime becomes

$$|X_M(s)|^2 \approx \frac{N_0^2 G_D^2}{(dV/dx)^2} \frac{\omega_0^4}{|s|^4} + 4kT \frac{\omega_0}{M Q} \frac{1}{|s|^2} \\ = \frac{G_D^2 \omega_0^4}{|s|^4} \left(\frac{N_0^2}{(dV/dx)^2} + \frac{1}{G_D^2 M \omega_0^2} \frac{1}{Q} \right)$$

$$N(s) = N_0.$$

In the limit of large loop gain G_D the pendulum motion is determined entirely by electronic noise as stated at the introduction.

The noise spectrum of the output voltage is related to the noise by a similar expression

$$|\phi(s)|^2 = |X_i(s)|^2 |T_4(s)|^2 + |N(s)|^2 |T_5(s)|^2 \\ + |F_i(s)|^2 |T_6(s)|^2.$$

At high frequencies it only depends on the electronic noise since both $X_i(s)$ and $T_6(s)$ fall with increasing frequency while $T_4(s)$ becomes constant. The output voltage can be used to measure ground noise, but only at low frequencies where the electronic noise does not mask the signal.

¹ H. Billing, K. Maischberger, A. Rudiger, R. Schilling, L. Schnupp, and W. Winkler, J. Phys. E 12, 1043 (1979); R. L. Forward, Phys. Rev. D 17, 379 (1978); R. W. P. Drever, J. Hough, W. A. Edelstein, J. R. Pugh, and W. Martin, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 368, 11 (1979); R. Weiss, Q. Prog. Rep. Res. Lab. Electron., M.I.T. 105, 54 (1972).

2D) Fonctionnement de l'ensemble

Le fonctionnement de la maquette de l'antenne interférométrique du *Max-Planck Institut für Quantenoptik* à Garching, R.F.A., est décrit dans l'article suivant. L'auteur a eu le privilège de participer à la mise en marche, et d'avoir eu la responsabilité des développements, analyses, et interprétations de plusieurs aspects de cet interféromètre.

Nous donnons d'abord une description générale de l'instrument, qui est un interféromètre avec lignes à retard; l'écart entre les miroirs est de 30 m. La discussion des sources de bruit (bruits fondamentaux, fluctuations du gaz résiduel, bruits d'origine mécanique, et bruits techniques liés à la lumière) est une résumé des discussions trouvées dans la section de la thèse *Sources de bruit, solutions avec les évaluations pour les conditions trouvées dans la maquette de Garching*.

La première annexe montre en détail le calcul du bruit de grenaille (voir la section de la thèse *Détection de signal*) et présente les mesures que nous avons faites pour vérifier la dépendance du bruit en fonction des différents paramètres: visibilité des franges, bruit de l'amplificateur, intensité de la lumière, profondeur de modulation radio-fréquence, sensibilité les modulateurs électro-optiques.

La deuxième annexe est une description du système d'isolation sismique composé de pendules doubles (discuté dans la section de la thèse *Systèmes d'isolation sismique*). La façon de procéder pour notre mesure de la fonction de transfert est décrite.

Un grand nombre des idées discutées dans les sections précédentes sont illustrées dans cette expérience, et ont fonctionné ensemble d'une manière constructive.

Noise behavior of the Garching 30 meter prototype gravitational wave detector

D. Shoemaker*, R. Schilling, L. Schnupp
W. Winkler, K. Maischberger, A. Rüdiger

Abstract The prototype gravitational wave detector at Garching is described: in a laser-illuminated Michelson interferometer having arms 30 m in length, a folded optical path of 3 km is realized. The origin, action, and magnitude of possible noise sources are given. The agreement between the expected and measured noise is good. For a band of astrophysical interest, extending from 1 to 6 kHz, the quantum shot noise corresponding to a light power of $P = 0.23$ W is dominant. In terms of the dimensionless strain h the best sensitivity in a 1 kHz bandwidth is $h = 3 \cdot 10^{-18}$, comparable to the most sensitive Weber-bar type antennas.

1) Introduction

Various methods have been proposed for the detection of gravitational radiation; two methods have been developed to a point where the chances of a successful search for gravitational wave events can be realistically assessed. The resonant bar technique was pioneered by Weber [1] and followed by further efforts, first with room temperature bars (Billing [2]) and more recently with cooled bars using very low noise superconducting transducers (see [3] and references therein; also, for the current sensitivities, see [4]). These experiments have put important upper limits on the level of gravitational radiation. The best sensitivities for the gravitational strain h that have been obtained so far are of the order of $h \approx 10^{-18}$.

A different approach is to use interferometric techniques to sense changes in the optical path length between widely separated test masses, as first discussed by Gertsenshtain and Pustovoit [5]. Early workers in this field include Weiss [6], and Forward [7]. Since that time a number of groups have pursued this method, and there are now prototype interferometers at MIT [8], Glasgow [9], Caltech [10], Orsay [11], and at the Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Garching. From the best sensitivity values of these prototypes, as obtained at Garching [12], and recently also at Glasgow [13], one can extrapolate to the sensitivity of large interferometric antennas; an ultimate goal of better than $h \approx 10^{-21}$ seems attainable.

Work on laser interferometers at the Max-Planck-Institut started as early as 1974 (initially at the Institut für Astrophysik, now at the MPI für Quantenoptik) and first concentrated on a 3 m arm length prototype ([14] and references there). After encouraging results it was decided that one could profit from a longer baseline

* Current address: C. N. R. S., Bâtiment 104, 91405 Orsay, France

interferometer (30 meter), the construction of which was completed in mid-1983. The goal of the research is to investigate the noise sources in prototype gravitational wave detectors as an aid in planning full scale detectors [15]. This paper will describe the 30 meter instrument, and particularly its 1986 improvements, in some detail, and it will present the status of the understanding of noise sources observed therein.

The basic design of the 30 meter prototype is quite similar to the earlier 3 meter prototype [16]; a schematic diagram is shown in figure 1.

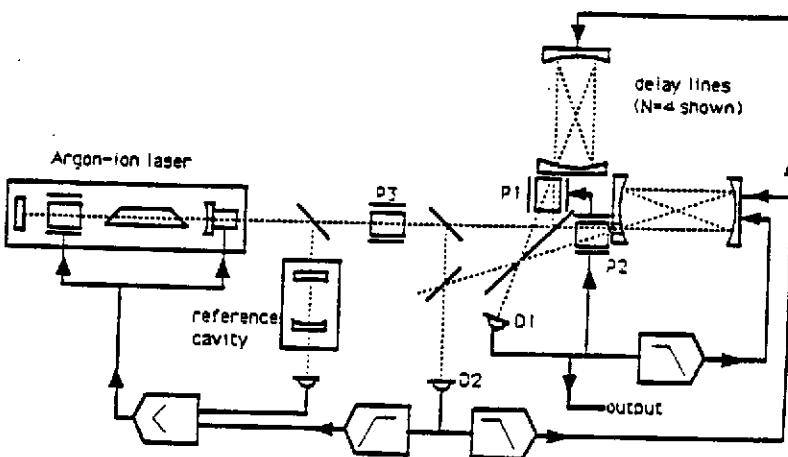


Figure 1 : A schematic view of the interferometer

A Michelson interferometer formed of effectively 'free' masses is illuminated by an Argon ion laser, with the light path folded in the optical delay-line configuration [17] to increase the sensitivity of the interferometer to gravitational waves. The interference pattern (on diode D1) is held to a minimum of intensity by a servo-system, and the control signal of this servo would contain the gravitational wave signal. This control signal can be interpreted in terms of equivalent mirror displacement x ; this is convenient for comparison with noise sources.

Because the response of the interferometer to gravitationally induced strains is broadband in nature, as are most of the noise sources encountered, it is helpful to work with noise spectral densities (that is, the noise contributed per unit bandwidth). Rigorously, such spectral densities are defined as the squared deviations per unit bandwidth, say, in m^2/Hz . It has become customary, however, to express them in linear measure, so that the units come out as $\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$. In this paper, such linear spectral densities will be characterized by a tilde above the symbol. In figure 2, the spectra of anticipated noise sources are illustrated, expressed as equivalent mirror motion \tilde{x} , calibrated in units of $\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$. To calculate the corresponding sensitivity in gravitational strain, $\tilde{h} \equiv \tilde{x}\ell/\ell$, the mirror motion \tilde{x} is divided by the interferometer arm length ℓ (30 m for the Garching interferometer).

2) Quantum noise

The two arms of the interferometer are at right angles to each other (figure 1). The optical path in each arm is folded in a delay-line configuration and the beams returning from the two delay lines are brought to interference. The separation between the mirrors (which have a radius of curvature of 31.6 m) of the delay-line can be varied between 29 and 32 m to obtain the desired number of beams in the delay-line. For the data presented here, $N = 90$ beams are used, giving a light storage time of 9 μs . The separation of the delay line mirrors can be adjusted with motor driven translation stages to find the 're-entrant condition' for the delay-line. This leads to a first order independence of the path length on tilts, rotations, and lateral translations of the far delay-line mirrors [18, 19].

The beam splitter and each of the delay-line mirrors are balanced in a simple wire sling pendulum which forms part of the mechanical isolation system (see sections 4 and 5, and figure 3), and the other optical components are treated similarly. The coarse alignment of the interferometer is achieved in the vertical axis with rotation of the pendulum suspension points (motor driven) and in the horizontal axis by screw adjustment of the point at which the pendulum wires leave the optical component. Fine adjustment is achieved with offset currents in the coils of the active pendulum damping system (see below); this allows optimization of the contrast in the interferometer. The best contrast $K = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min})$ observed with the 90 beam delay-line is $K = 0.992$, I_{\max} and I_{\min} being the photocurrents at the maximum and the minimum of the interference pattern. The contrast is limited primarily by imperfections in the delay-line mirrors themselves. The optical system holds a contrast of $K \geq 0.96$ for several days without readjustment.

If the only limit to determining the position of the masses were the shot noise of the photocurrent in the photodetector, and if the contrast of the interferometer were perfect, the noise equivalent position fluctuation would be

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{2e}{I_{\max}}}$$

where λ is the wavelength of the light used to illuminate the interferometer, and e the elementary charge. The finite contrast compromises this sensitivity, as do technical noise sources (Johnson noise in the photodetector, amplifier noise); an expression which takes these factors into account, and which is relevant for the modulation scheme used, is derived in appendix A. In the ideal case ($K = 1.00$, no technical noise), it reduces to the simple form above. For the data presented here (with the experimental conditions $N = 90$, $\lambda = 514.5$ nm, $K = 0.96$, $I_{\max} = 70$ mA, corresponding to a maximum of about 0.23 W on the photodetector), the calculation results in a shot noise level which is equivalent to a displacement of $2.5 \cdot 10^{-18}$ m/ $\sqrt{\text{Hz}}$, shown as curve a in figure 2. This is a factor 1.25 (2 dB) greater than the ideal case of perfect contrast and no additional noise sources. The influence of radiation pressure fluctuations [20, 6] is completely negligible at the power levels encountered here.

3) Fluctuations of residual gas pressure

The entire interferometer is contained in a vacuum system to reduce the effect of refractive index fluctuations and ambient acoustic noise on the apparent path length. The vacuum system has three vertical tanks, 1.0 m in diameter, 1.1 m in height. The 'central tank', which houses the beam splitter, the near delay line mirrors, and the input optics, is connected to the two 'end tanks' (which contain the far delay line mirrors) by horizontal tubes 0.4 m in diameter. The end tanks are on a system of rails, and it is possible to add extension tubes (maximum length 3 m) to adjust the separation between the tanks. Only the central tank is in the laboratory; the end tanks are in separate end-houses. The horizontal tubes are supported by steel guides on a concrete bed, which in turn is covered by a semi-circular concrete cover and about one-half meter of earth. Rotary and turbomolecular pumps allow the system to be pumped from atmospheric pressure (10^5 Pa) to 10^{-2} Pa in 6 hours; with the pumps turned off, the system pressure rises to 1 Pa in 24 hours. The measurements presented here were performed with pressures between 10^{-1} and 1 Pa.

A noise source to be considered, although not a significant one at present, stems from the residual gas in the vacuum system. The number of molecules in the light path fluctuates, leading to small changes in the apparent optical index, and hence in path length. An estimate [21] of the magnitude of this effect gives an equivalent mirror motion with a linear spectral density

$$\tilde{x} \approx \left[\frac{2 \cdot \sqrt{3\pi} \cdot (n_0 - 1)^2}{4\pi \cdot c_0 \cdot \sqrt{\lambda}} \cdot N \cdot \sqrt{l} \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right) \cdot \left(\frac{T_0}{T} \right)^{3/2} \right]^{1/2}$$

where A_0 is Avogadro's number ($6.02 \cdot 10^{23}$ molecules/mole), V_0 is the volume of one mole of gas at STP $22.4 \cdot 10^{-3}$ m³/mole), n_0 is the index of refraction of the gas, c_0 is the most probable thermal molecular speed in the gas (for nitrogen at room temperature $T = 300^\circ K$, $n_0 \approx 1 + 2.7 \cdot 10^{-4}$ and $c_0 \approx 400$ m/s), and p_0 and T_0 are the standard pressure and temperature. For these values and typical measurement pressures p one finds $\tilde{x} \approx 2 \cdot 10^{-19}$ m/ $\sqrt{\text{Hz}}$ (curve b in figure 2).

4) Motions of the optical components

As mentioned, to isolate the optical components from movement of the suspension point, they are hung as pendulums of length l , and thus of resonant angular frequency $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. The $(\omega_0/\omega)^2$ isolation that one would expect from an ideal pendulum is compromised by the finite quality factor Q of the pendulum, and by the suspension wire resonances ('violin string' modes); a model which predicts well the measured transfer function $H(\omega)$ (ratio of mirror motion to suspension point motion) of the suspension system is derived in Appendix B, and the measured and predicted transfer function are plotted in figure 6. For the pendulums in use at Garching, one finds a transfer function which can be roughly characterized as $(\omega_0/\omega)^2$ to the first 'violin string' wire resonance of 212 Hz, then exhibiting a complex resonant structure with an isolation typically better than 10^{-4} .

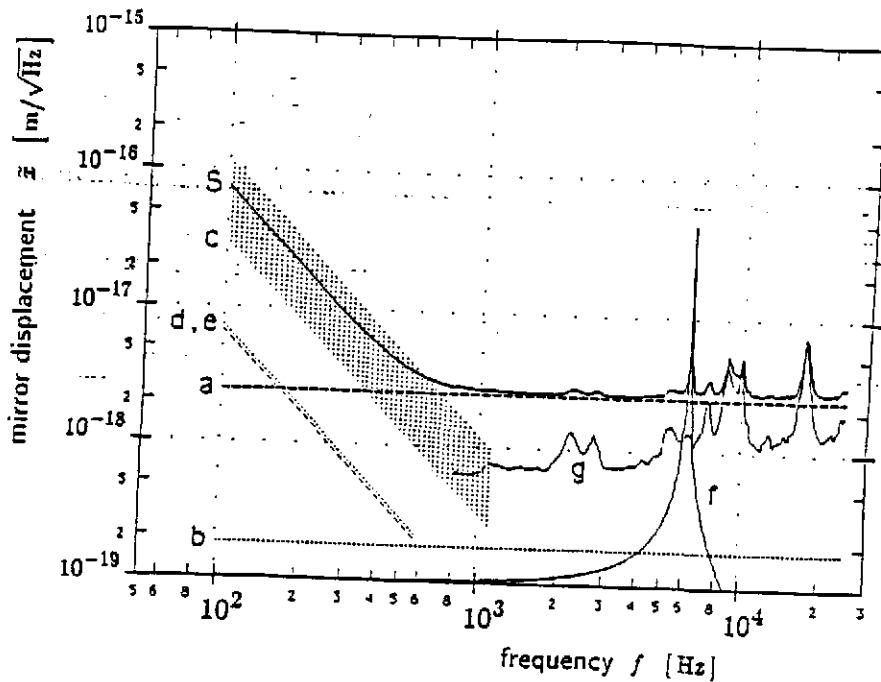


Figure 2 : Spectral densities of various noise sources, expressed as equivalent mirror motion \tilde{x} , in units of m/\sqrt{Hz} .

- a: photon shot noise,
- b: residual gas fluctuations,
- c: filtered ground motion,
- d: electronic damping system,
- e: pendulum thermal motion,
- f: mirror thermal motion,
- g: laser frequency fluctuations,
- S: quadratic sum of all of the noise sources above.

This wire sling pendulum is suspended in turn from an upper pendulum, consisting of a massive plate suspended by coil springs 0.1 m in length (figure 3). In addition to the improvement of the isolation in the longitudinal direction due to the two pendulums in series (see appendix B), the vertical compliance of the coil spring provides isolation from vertical and rotational motions of the overall support structure which could be cross-coupled into horizontal motion of the optical component. Up to 60 Hz, the measured transfer function (see figure 6) of the compound (two-stage) pendulum falls as $(\omega_1 \omega_0)^2 / \omega^4$, where ω_1 and ω_0 are the angular resonant frequencies of the top and bottom pendulums; above a transition section extending from 60 to 200 Hz, the attenuation is typically 10^{-6} . The ground noise spectrum of the laboratory in Garching, while neither stationary nor smooth, can be roughly characterized by $3 \cdot 10^{-7} \cdot (1 \text{ Hz}/f)^2 \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ between 1 Hz and 1 kHz. Hence, the residual relative motion of the optical components can be estimated, and it is shown as the hashed area labeled as c in figure 2.

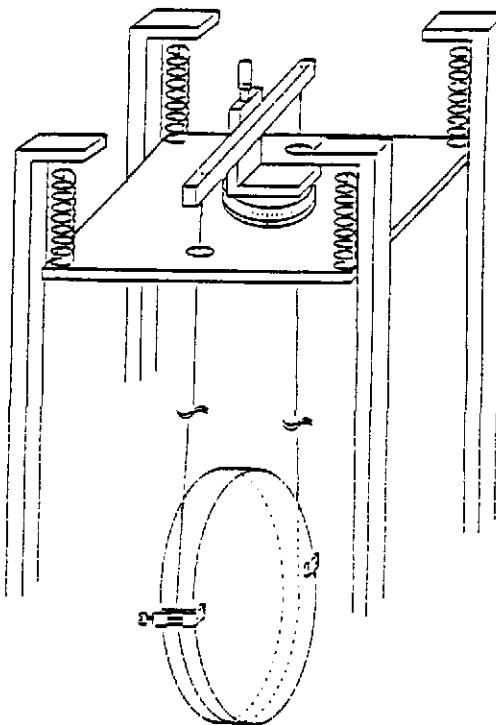


Figure 3 : The seismic isolation system. The upper stage, supported by 4 coil springs, carries translation and rotation stages for the mirror suspension wire. The upper suspension is 0.10 m in length, the lower 0.72 m. One of the screws for coarse adjustment of mirror tilt is indicated.

The pendulums are electronically damped at low frequencies [22] to prevent large motions due to the ground noise at the resonant frequency. To detect the motion of the pendulum with respect to the suspension point, for each degree of freedom to be damped a small vane is mounted on the optical component, and an infrared LED and opposing silicon photodiode are mounted on the suspension point base. The vane partially interrupts the light, developing a signal proportional to the displacement of the vane. The inherent noise of this measurement, for the geometry used, is $5 \cdot 10^{-9} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ at 0.75 Hz, and thus well below the values of the order $10^{-7} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ actually being measured. This inherent noise is reduced both electronically by the damping servo-amplifiers and mechanically by the mass of the optical component, leading to expected motions of $3 \cdot 10^{-11} \cdot (1 \text{ Hz}/f)^4 \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$, much less than the present sensitivity.

The damping forces are applied by a small permanent magnet mounted integrally with the vane, and an aircore electromagnet mounted concentrically with the LED-photodiode assembly. The coil is positioned so that the magnetic field gradient is maximized at the magnet; this results in the best decoupling of the forces exerted on the optical component from (ground-noise induced) motion of the coil. Assuming an error in the coil position of as much as 1 mm, and the largest control current possible, the natural ground motion could lead to optical component motions of the order of $4 \cdot 10^{-14} \cdot (1 \text{ Hz}/f)^4 \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$, a negligible level at the present sensitivity. Noise in the coil current due to the final amplifier, which is left wide-band to allow the use of the coil-magnet system in the interferometer locking servo-systems, must be taken into account; for the present system, this noise results in a motion of the optical components of $6.8 \cdot 10^{-14} \cdot (1 \text{ Hz}/f)^2 \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$, illustrated as curve d in figure 2.

The thermally driven noise of the pendulum can be estimated by considering it as a damped harmonic oscillator; here the Q is that due to the pendulum without electronic damping, because the damping servo-system gain is rolled off at high frequencies. For the thermal motion of an oscillator with an internal energy of $\frac{1}{2}k_B T$ one expects a spectral density

$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{4k_B T}{m Q \omega_0^3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + \frac{1}{Q^2}(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

which for the pendulum, in the limit of frequencies high compared with the pendulum resonant frequency, gives $7.4 \cdot 10^{-14} \cdot (1 \text{ Hz}/f)^2 \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$. This is shown as curve e in figure 2. Lossy isolation systems (for instance lead and rubber stacks) have been avoided, as measurements show that only relatively little isolation with a complicated resonance spectrum is achieved. The tendency of such systems to 'creep', and their unknown thermally driven motion, make them unattractive for future designs.

The thermally driven motion of the internal modes of the mirrors themselves must also be considered. The delay-line mirrors and the beamsplitter are made of circular substrates 150 mm in diameter and 25 mm thick. The previously mentioned wire sling suspension system keeps the mechanical resonances simple and of high Q . The observed frequency of 6.3 kHz for the lowest mode of the mirrors agrees well with calculation [23] for a free cylinder; the Q of this resonance is 500 (limited by the plastic clips which guide the suspension wires, and the material of construction, Zerodur). The motion measured at the peak, $5 \cdot 10^{-17} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$, is about a factor of seven less than that which one calculates. This can be explained by noting that the lowest mode has radial nodal lines, and the pattern is sampled by the beam spots roughly equally often on the approaching and receding sections of the mirror, leading to a noticeable cancellation of the effect on the path length change. The calculated contribution to the displacement noise is shown in curve f, figure 2. For frequencies much lower than the resonance the noise is at a level of $1 \cdot 10^{-19} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$.

5) Fluctuations of laser light power

The interferometer output falling on diode D1 (see figure 1) is held to a dark fringe with a modulation method [6]: In both arms of the interferometer, Pockels cells (P1 and P2 in figure 1) in the light path between the beamsplitter and the near delay-line mirror are used to impress a high frequency (10 MHz) phase modulation on the light. The light falling on the measurement photodiode D1 is demodulated, and the resulting error signal is amplified, filtered, and applied to the Pockels cells to hold the intensity on the photodiode to a minimum. The voltage applied to the Pockels cells, which is a linear function of the change of the light path in the delay lines, would carry the gravitational wave signal. The phase modulation frequency is chosen to be in the frequency range where the amplitude noise of the Argon laser is limited (at the power levels used) by the photon shot noise, typically above 5 MHz for the Coherent Innova 90-5 employed. To reduce the light reflected from the measurement photodiode D1 (EGG type DT110), it is held at the Brewster angle (for silicon $\approx 75^\circ$), thus achieving a quantum efficiency of about 80 %.

Keeping the interference pattern at a minimum of intensity reduces the sensitivity of the measurement to amplitude noise in the illuminating laser beam, keeps the intensity on the measurement photodiode D1 at a manageable level, and allows the other output beam of the interferometer to be used for other purposes. The unity gain frequency in this servo-loop must be high for two reasons: first, to give a very large gain at dc, ensuring that the interferometer is held accurately to the dark fringe thus eliminating the influence of low frequency laser intensity fluctuations on the signal; and second, to give a reliable measurement signal at the highest signal frequency of interest (about 10 kHz). Because, in the present optical arrangement, the light passes through the Pockels cells both before and after the delay line, the unity gain frequency is limited by the time delay in the delay-line to about 60 kHz (for 90 beams in the delay-line). To reduce the dynamic range of the signal applied to the Pockels cells at very low frequencies (where the signals are largest) this control signal is also sent, suitably filtered, to the damping coils which exert forces on the far mirrors. The unity-gain point in this slow servo-loop is set to about 30 Hz, a compromise between dynamic range reduction and the desire not to be acting on the mirrors mechanically in the frequency range of interest (above 100 Hz). This servo system reduces the influence of amplitude noise to a negligible level.

6) Fluctuations of laser light frequency and position

The light which illuminates the interferometer must be stabilized in frequency because of imperfections in the optical system. The delay line mirrors are not all of exactly the same radius of curvature, which means that meeting the re-entrant condition for both delay lines does not result in total path lengths that are exactly equal, but which differ by a static offset ΔL . This directly translates frequency fluctuations $\delta\nu$ into apparent mirror motion \tilde{z} [16]

$$\tilde{z} = \frac{\Delta L}{N} \cdot \frac{\delta\nu}{\nu}.$$

A total path length difference of about 2 m is observed when both 90 beam delay lines are re-entrant, implying a net mismatch in curvature of about 0.02 m for the present mirrors.

In addition, stray light in the delay lines (due for instance to scattering from the mirror surfaces) allows interference between light having traveled different path lengths [16, 18]; for $N = 90$ beams in the delay line, the characteristic difference is about 3 kilometers. The high reflectivity of the mirrors allows significant contributions even from 'trapped' stray light which has made a large number of round trips of the delay line (corresponding to path differences up to the order of one hundred kilometers). The current mirrors employed show a scattering coefficient σ (relative amplitude of the scattered light which then interferes with the main beam) of about 10^{-4} ; given the mirror reflectivity of 0.997, one finds that the fluctuation in apparent path length due to this effect is of the same order of magnitude as that due to the static path length difference. Thus, the coefficient that relates frequency noise $\delta\nu$ to apparent mirror motion \dot{z} is about $7 \cdot 10^{-17} \text{ m/Hz}$.

The frequency is stabilized in two steps (see figure 1). In the first step [14], some of the light leaving the laser is directed to a Fabry-Perot reference cavity used in transmission, compared with a reference beam, and an error signal is formed. Suitably amplified and filtered, it is applied at low frequencies to a piezo-electric transducer holding one of the laser mirrors, and at high frequencies to an intra-cavity Pockels cell. The unity-gain frequency of this servo-loop is about 400 kHz, limited by the bandwidth of the electronics.

In the second step [12], a fraction of the light leaving the interferometer on the input side of the beamsplitter is brought to interference with a fraction of the input light. The phase difference between these two beams is a function of the average path length in the two arms and the remaining frequency noise on the laser light. The error signal is developed with a modulation-demodulation scheme similar to that described for the main signal path, utilizing Pockels cell P3 and photodiode D2. At frequencies in the range of a few Hertz, the reference Fabry-Perot is the more stable reference, and the error signal is used to prevent common-mode motion of the delay-line mirrors (i.e., the interference pattern on D2 is held to a minimum of intensity). At frequencies higher than a few tens of Hertz, the length of the delay line is a quiet and more sensitive length reference; the error signal in this frequency range is fed back to the laser. The gain possible in this servo-loop is primarily limited by the time delay in the delay line; for a storage time of 9 μs (corresponding to $N = 90$ beams in the delay line) it is about 60 kHz. An estimate of the influence on the interferometer of the remaining frequency noise is shown as curve g in figure 2. The resonance structures seen around 10 kHz are due to thermally driven motions in the construction of the reference Fabry-Perot.

Fluctuations in the beam geometry can be translated into apparent mirror motions [22]. In a simple Michelson interferometer, a misalignment of the beam-splitter leads to a sensitivity to changes in the beam position; a difference in the length of the two arms leads to a sensitivity to beam direction. In addition, there remains a sensitivity due to irregularities in the optical components (mirrors and Pockels cells in particular) even when the interferometer is well aligned and symmetrized.

A single mode optical fiber is used to suppress such fluctuations in the beam geometry [24] and to carry the light from the laser table into the vacuum. The fiber employed here* has a mode radius $w = 2.7 \mu\text{m}$, and microscope objectives (10 \times) are used to couple into and out of the fiber. It is not a polarization holding fiber, and to correct for slow thermal drifts in the polarization a $\lambda/2$ plate in front of the input to the fiber is used. The fiber output assembly is isolated from ground noise by suspending it on an electronically damped pendulum mass; this is necessary to obtain a jitter-free beam, and allows convenient adjustment of the input beam angle and position as well.

A coefficient for the sensitivity to beam motion can be obtained by giving a calibrated motion to the beam and viewing the effect in the apparent mirror motion spectrum, which in the system with $N = 90$ bounces gave $2 \cdot 10^{-6}$ meters/radian. Attempts to measure the residual beam jitter after the fiber are limited by measurement noise (shot noise in the quadrant photodiode current) at $3 \cdot 10^{-12} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}}$ for all frequencies higher than 50 Hz. Thus the upper limit for the influence of beam jitter on the interferometer spectrum lies at $6 \cdot 10^{-18} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$, a factor of two higher than the observed interferometer noise level in the kilohertz range; clearly, a more sensitive independent measurement of the beam motion after the fiber is needed before it can be eliminated as a possible noise source.

7) Performance of the interferometer

Estimates of the contribution to the noise 'budget' by each of the noise sources mentioned above have been made in figure 2, as well as a quadratic sum of all of these sources (curve S). The figure for beam jitter is not included in this sum because it is only an upper limit. The output signal of the interferometer—the control signal for the Pockels cells in the arms of the interferometer—is usually analyzed by a Fourier transform spectrum analyzer (hp3582A). Continuous measurements of 30 minutes or an hour are possible, and when the interferometer loses 'lock' (usually due to a longitudinal mode hop in the laser) the servo-systems are automatically sequentially 'relocked'. Figure 4, curve A, is a composite of several two minute averages at different sampling rates (to cover the broad frequency range presented), resulting in the relatively small uncertainty in the noise level. Also shown is the quadratic sum of all noise sources (curve S); it is seen that the noise is in excess of the estimate.

Up to frequencies of several hundred Hertz, multiples of the 50 Hz mains supply are quite evident. Also seen are several suspension wire resonances (at 212 and 424 Hz). The overall level lies above that predicted; possible explanations are that remaining cross coupling in the pendulum isolation system allows ground motion to drive the mirrors, or that there is insufficient decoupling between the laser and the interferometer.

* The fiber used is an experimental type, unfortunately not in production, kindly donated by AEG.

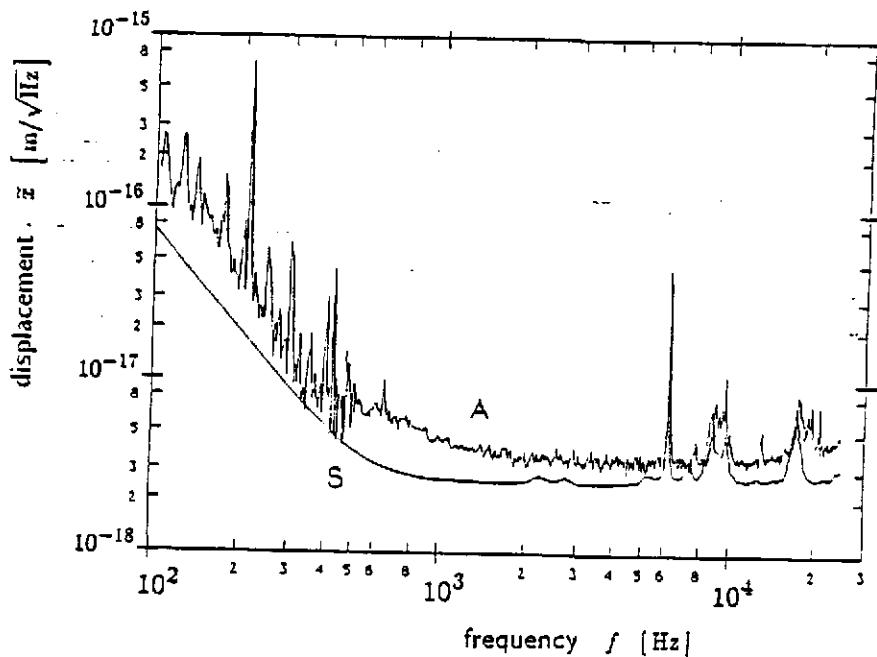


Figure 4 : The interferometer noise spectrum.
 A: measured, S: predicted.

At higher frequencies the mirror resonances at 6.3 kHz are visible, as is the remaining influence of resonances in the Fabry-Perot used as the frequency stabilization reference. There are still contributions from the mains harmonics, although they are not resolved in the spectrum. In the quietest frequency band, between 1 and 6 kHz, there is a discrepancy of a linear factor of 1.4 (or in logarithmic measure 3 dB) between the predicted shot noise level and that observed. Experiments with the 0.3 m interferometer (see appendix C), and with different power levels (see appendix A), suggest that this excess consists of two parts: a discrepancy between the calculated and observed shot noise, which causes a scaling error (i.e., a constant error in logarithmic measure) of 1.06; and a constant noise (measured in mirror displacement) at a level of $2.5 \cdot 10^{-18} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$. The latter noise source could be one (or several) of the previously mentioned white noise sources. To gain more knowledge in this frequency regime the shot noise limit must be significantly reduced, requiring considerably more light power.

8) Conclusion

The Garching prototype interferometer, with an optical path of 90×30 m, is very close to the shot noise limit calculated for the relatively high power available, and over a broad frequency range of astrophysical interest. Even though this prototype has a delay-line storage time of only $9\mu s$, it already has a sensitivity (expressed as an equivalent dimensionless strain h of $3 \cdot 10^{-18}$ in a 1 kHz bandwidth) which for many predicted sources is comparable to the most sensitive bar type antennas [25]. Optimizing the storage time for the frequency range envisaged would allow an increase in sensitivity by almost two orders of magnitude. Much of the technology developed here can be extended to full scale gravitational wave interferometers [15], leading to optimism for the feasibility of gravitational wave detection in the near future.

Appendices

A) Calculation of the shot noise

The current $I_{ph}(t)$ in the measurement photodiode D1 is

$$I_{ph}(t) = I_{\min} + \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} (1 - \cos \phi(t))$$

with

$$\phi(t) = kx + \phi_m \sin \omega_m t$$

and

$$x = x_0 + \delta x(t),$$

where $k = (2\pi)/\lambda$, x_0 the static difference in optical path between the arms of the interferometer (the 'operating point'), $\delta x(t)$ the signal (small in comparison with λ , and slowly changing in comparison with the modulation frequency), ϕ_m the amplitude of the high-frequency phase modulation applied by the Pockels cells, and ω_m the modulation frequency. This photodiode current can be expanded in a series of Bessel functions $J_n(\phi_m)$; keeping only the lowest order terms (this corresponds to bandpass filtering the photodiode signal around the modulation frequency and at dc) one finds:

$$I_{dc} = I_{\min} + \frac{I_{eff}}{2} (1 - J_0(\phi_m) \cos kx)$$

and

$$I_{\omega_m} = \frac{I_{eff}}{2} 2J_1(\phi_m) \sin kx \sin \omega_m t,$$

with an effective current swing of $I_{eff} = (I_{\max} - I_{\min})$.

The servo-system is arranged to hold the output of the interferometer on diode D1 at a minimum of intensity; this corresponds to $kx \ll 1$ (modulo 2π), or

$$I_{dc} \approx I_{\min} + \frac{I_{eff}}{2} (1 - J_0(\phi_m))$$

and

$$I_{\omega_m} \approx I_{eff} J_1(\phi_m) k \delta x(t) \sin \omega_m t.$$

The signal is demodulated by multiplying by a square wave at ω_m ; taking a net mixer gain of R , and keeping only terms around dc, one finds

$$V_{sig} = R I_{eff} J_1(\phi_m) k \delta x(t).$$

The noise that competes with this signal is the shot noise due to the flow of current in the photodiode I_{dc} , and the technical noise sources (Johnson noise of the photodiode internal resistance, amplifier electronic noise). The latter can be characterized as an additional fixed virtual current I_{det} in the photodiode. The noise due to these two currents is white and has a linear spectral density of $\sqrt{2e(I_{dc} + I_{det})}$ at the photodiode; it is filtered by the photodiode amplifier so that the amplitude is negligible for frequencies outside of the band $\omega_m \pm \omega_{sig}$, with ω_{sig} the (angular) signal frequency. This noise is then multiplied by the square wave

in the mixer, resulting in noise components which are mixed down to the signal frequency:

$$\tilde{V}_{\text{noise}} = R \sqrt{2} \sqrt{2e(I_{\text{dc}} + I_{\text{det}})}$$

The $\sqrt{2}$ is due to the fact that the noise above and below the carrier are mixed down to the same low (positive) frequency, and add incoherently.

Equating the signal and the noise, one finds that the equivalent displacement noise due to the shot noise can be expressed by the linear spectral density

$$\tilde{x}_{\text{shot}} = \frac{1}{k} \sqrt{2} \frac{\sqrt{2e(I_{\text{dc}} + I_{\text{det}})}}{J_1(\phi_m) I_{\text{eff}}}$$

The expression for \tilde{x}_{shot} as a function of ϕ_m has a gentle minimum, and the ϕ_m corresponding to this minimum should be applied to observe the highest sensitivity. The signal which is used for the output of the interferometer is the control signal to the Pockels cells; in the limit of large loop gain, this voltage is related to the position noise via the Pockels cell voltage V_λ that causes a change in optical path by one wavelength λ . Then the noise voltage expected for the shot noise limit is

$$\tilde{V}_{\text{shot}} = \frac{V_\lambda \cdot \tilde{x}_{\text{shot}}}{\lambda}$$

An approximate expression, valid for typical contrasts ($K > 0.9$) and modulation depths ($I_{\text{dc}} < 0.2 \cdot I_{\text{max}}$), simplifies the calculation of the voltage shot noise \tilde{V}_{shot}

$$\tilde{V}_{\text{shot}} \approx \frac{V_\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{2e(I_{\text{dc}} + I_{\text{det}})}{(I_{\text{dc}} - I_{\text{min}}) I_{\text{eff}} - \frac{3}{2}(I_{\text{dc}} - I_{\text{min}})^2}}$$

Under these circumstances, an approximation giving the optimum modulation depth can be found. The observable quantity $I_{\text{dc,op}}$ corresponding to this optimum is

$$I_{\text{dc,op}} \approx \sqrt{\frac{2}{3}(I_{\text{min}} + I_{\text{det}}) I_{\text{max}}}$$

Measurements were performed on the 30 meter and simplified 0.3 meter interferometers (appendix C) to verify the accuracy of the exact expressions. The photodiode currents I_{max} , I_{min} , and I_{dc} were monitored with a precision resistor; the technical noise was measured by comparison with the noise due to an incandescent lamp at frequencies near the modulation frequency of 10 MHz where it is assumed that the lamp has no noise above shot noise. The V_λ for the Pockels cells was measured 'in situ' by finding the voltage step which resulted in a change of exactly one λ of optical path length in the cell, and tested separately for nonlinearity (the voltage for a jump of 2λ is within high precision twice that needed for 1λ).

With the $N = 90$ beam interferometer operating under normal conditions, the voltage noise on the Pockels cells in the quietest frequency range (4 to 5 kHz) was observed for a variety of conditions (changes in illuminating intensity, depth of modulation, contrast, and excess white light on the photodetector). A fit was made to the experimental data with three free parameters: scale factors β and κ

which describe errors in V_λ and I_{det} respectively, and an additive constant ϵ which describes a constant excess noise motion of the mirrors:

$$\tilde{V}_{\text{shot, fit}}^2 = \left(\frac{\beta V_\lambda}{2\pi} \right)^2 \frac{4e(\kappa I_{\text{det}} + I_{\text{dc}})}{J_1^2(\phi_m) I_{\text{eff}}^2} + \epsilon^2$$

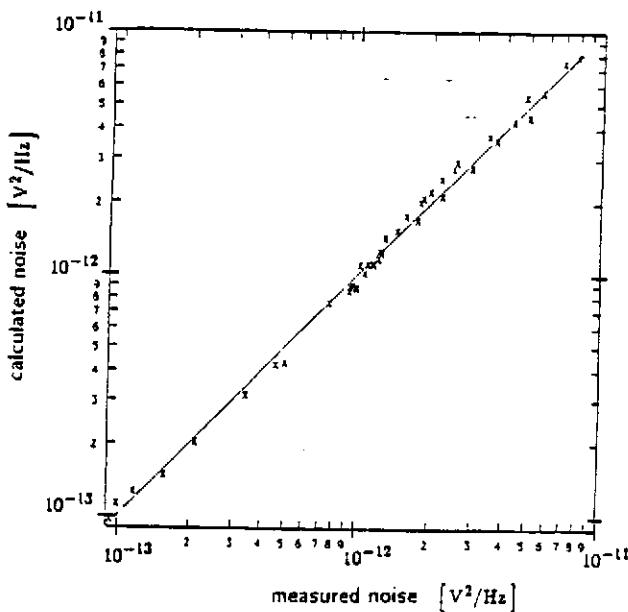


Figure 5 : Comparison of measured and calculated shot noise. The solid line indicates the locus of perfect agreement between measured and calculated noise levels.

The result for the 30 meter interferometer is shown in figure 5, where the measured noise in V^2/Hz is the independent variable and the calculated noise in V^2/Hz is the dependent variable, and the measured points are compared with the ideal case, a one-to-one relationship. A logarithmic graph was chosen to allow the large range of values to be clearly presented; however, a graph linear in both axis is a more useful diagnostic tool, with the advantage of allowing errors in the fit to appear in a simple graphical form. For instance, an error in the Pockels cell coefficient V_λ appears as a slope error, a constant additive noise ϵ as a displacement, and an error in the effective technical noise current I_{det} as a deviation from that which should be a straight line. For the data presented, the best β is 1.06, the best κ is 0.88, and the best ϵ is $2.37 \cdot 10^{-7} \text{ V}/\sqrt{\text{Hz}}$ (the latter corresponding to a noise in mirror displacement of $2.5 \cdot 10^{-18} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$). Because the origin of these differences from the expected values is not yet explained, the equation without modification is used to calculate the expected shot noise limit for the 90 beam

delay-line interferometer, as given in figure 2. However, it is reassuring that the errors are small, and that the functional dependence of the noise is correct.

B) Transfer function of the pendulum isolation system

The pendulum can be treated in close analogy to an electrical (lossfree) transmission line, terminated with an inductance (to represent the inertial termination by the impedance $Z_p = i\omega m$ of the pendulum mass m). The characteristic impedance $Z = \sqrt{mg\gamma}$ of the mechanical transmission line is given by the tensile force mg on the wire and the linear mass density γ . The propagation constant $k = \omega/v_{tr}$ is determined by the velocity $v_{tr} = \sqrt{mg/\gamma}$ with which a transverse motion propagates along the wire.

As in an electrical transmission line, the displacement x_p at the termination (pendulum mass) is transformed to the front end (suspension point) via a transformation

$$z_0 = x_p \left(\frac{Z_p}{Z} i \sin kl + \cos kl \right),$$

and one arrives at the transfer function magnitude

$$H(\omega) \equiv \frac{x_p}{z_0} = \frac{1}{\cos kl - \frac{\omega m}{Z} \sin kl}.$$

The lowest resonance $\omega_p = \sqrt{g/l}$ (the pendulation mode) and the well-known low-frequency transfer function $H(\omega) = (1 - (\omega/\omega_p)^2)^{-1}$ are easily derived by expanding for $kl \ll 1$; for $l = 0.72$ m we have $f_p = \omega_p/2\pi \approx 0.59$ Hz.

All further resonances (the 'violin string' resonances at ω_n) can be found from the approximation $kl \approx n\pi$, leading to

$$\omega_n \approx n\pi \omega_p \sqrt{\frac{m}{\mu}},$$

with $\mu = \gamma \cdot l$ the mass of the wire sling (two wires). In between these resonances, the transfer function $H(\omega)$ provides an isolation that is at best

$$H(\omega) \approx \frac{Z}{wm} = \frac{\omega_p}{\omega} \sqrt{\frac{\mu}{m}}.$$

For the values used ($m = 1.1$ kg, steel wire 0.1 mm in diameter), the mass ratio m/μ is about 12500, and the wire resonances are in very good agreement with the measured peaks at multiples of $f_1 \approx 212$ Hz. At these frequencies, the pendulum suspension not only loses its isolation feature, it may even enhance the pendulum mass motion. Figure 6 shows the measured (curve a) and calculated (curve b) transfer functions. The additional peaks observed in the measured transfer function at 300 Hz and 550 Hz are due to pickup of harmonics of the 50 Hz mains frequency.

The influence of the damping due to internal losses in the suspension system can be thought of as entering in two ways: first, as a modification in the high-frequency transfer function of the simple pendulum model, and secondly, as a

change in the form of the 'violin string' resonances. The finite Q of the pendulum motion, in particular if it is due to internal friction in the suspending wires, causes a transition from $H \approx (\omega_0/\omega)^2$ to $H \approx \omega_0/(\omega \cdot Q)$ at a transition frequency of $(\omega_0/2\pi) \cdot Q$. However, under normal conditions, the pendulum Q is primarily limited by damping from the residual gas: the measured pendulum Q shows a monotonic dependence on the residual gas pressure. At the lowest pressure attainable (10^{-3} Pa) it reaches $Q_{max} = 10^5$; at the normal operating pressure of 1 Pa, it is $Q = 3 \cdot 10^4$. If we take this Q_{max} as an upper limit for the internal losses, one calculates a transition frequency f_Q on the order of 10^5 Hz where the transfer function is dominated by the string resonances. These string resonances have measured Q' 's of the order of $2 \cdot 10^4$, which does not lead to a significant compromise of the transfer function; the primary effect is to keep the wire resonant peaks in the transfer function finite, in our case at values below unity. Thus, damping mechanisms do not significantly influence the performance of the isolation system.

The two stage pendulum currently in use at Garching can be similarly analyzed. By two-fold application of the transformation from the pendulum mass to the driving point, a transfer function for the compound pendulum is found. In contrast to the single pendulum, where there are no free parameters, it is necessary to characterize the coil springs (which form the upper pendulums) in terms of a linear mass density based on the measured transverse resonant frequencies and the length of the springs. With this parameter adjusted for the best fit, the measured and calculated transfer functions (in figure 6, curves c and d respectively) again are in reasonably good agreement.

The measurement of the pendulum transfer function is made difficult by the large (120 db) difference in amplitudes of mechanical motion between the pendulum suspension point and the mirror, and all acoustical or mechanical 'short circuits' must be carefully avoided. For this reason, the measurement is performed entirely in the vacuum system of the interferometer. The pendulum suspension point of one of the far delay-line mirrors is driven parallel to the interferometer arm axis by an electromagnetic 'shaker'. The motion at this point is monitored with a piezo-electric accelerometer (Endevco model 7705-1000), and the motion of the mirror is measured with the aid of the $N=90$ beam interferometer. The driving function for the 'shaker' is a swept sine wave, the frequencies close to the 'violin string' resonances having been avoided. A two-channel Fourier transform spectrum analyzer (hp3582A) calculates the raw transfer function, which is then corrected for the accelerometer response and the interferometer low-frequency servo-loop. The resulting measured transfer functions agree well with the predictions (see figure 6).

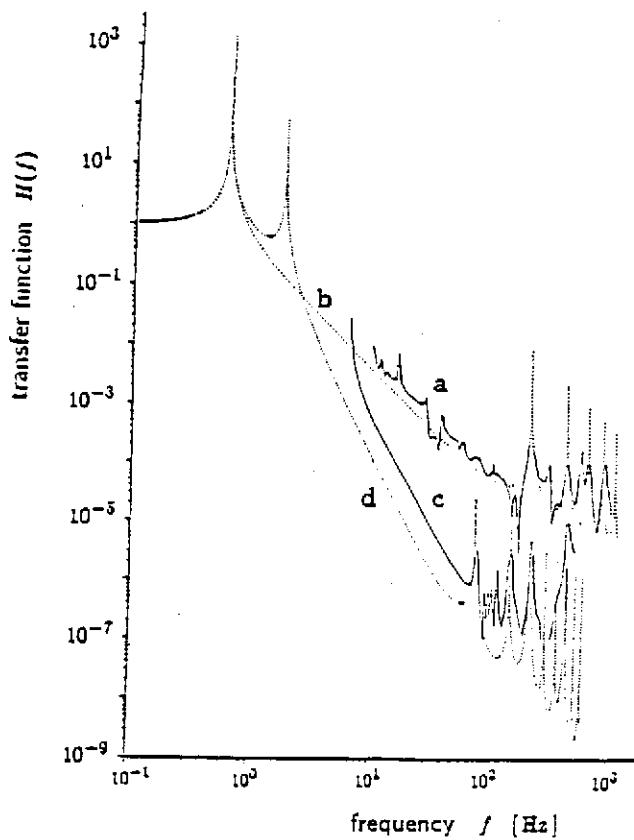


Figure 6 : Pendulum transfer functions:

a: measured, single stage,	b: calculated, single stage;
c: measured, double stage,	d: calculated, double stage.

C) The 0.3 meter interferometer

An alternative configuration of the interferometer is formed by turning the near delay-line mirrors around so that the beam is immediately returned to the beam splitter, for a total path of 0.6 m. The sensitivity of the interferometer to mirror motion is much reduced, and the optical path is simplified. The reduction of scattered light and the ability to bring the interferometer to near perfect symmetry strongly reduces the constraints on the laser frequency stabilization. The frequency stabilization servo-loop bandwidth achievable with the piezo-controlled laser mirror suffices, and this allows the operation of the laser without its internal Pockels cell, leading to higher output powers and thus more light in the interferometer.

However, the interferometer fringe detection electronics are the same as for the 30 m interferometer, and the Pockels cells are still used in the same manner; this allows tests of much of the system without the added complications associated with the delay lines. In particular it has proven invaluable for helping to locate mechanical resonances. Except for the expected contributions of ground noise (below several hundred Hertz) and thermally driven resonances of the optical components (above 6 kHz), the noise spectrum is limited by the shot noise in the measurement. A sample spectrum is shown in figure 7, for which $I_{\max} = 233 \text{ mA}$, and $I_{\min} = 0.7 \text{ mA}$; this corresponds to a contrast $K = 0.994$. In addition to indicating that the measurement system works properly at this level, $\delta L = 2.4 \cdot 10^{-10} \lambda/\sqrt{\text{Hz}}$, it is reassuring to see that the optical fiber and the Pockels cells do not display anomalous effects with light powers on the order of 1 W.

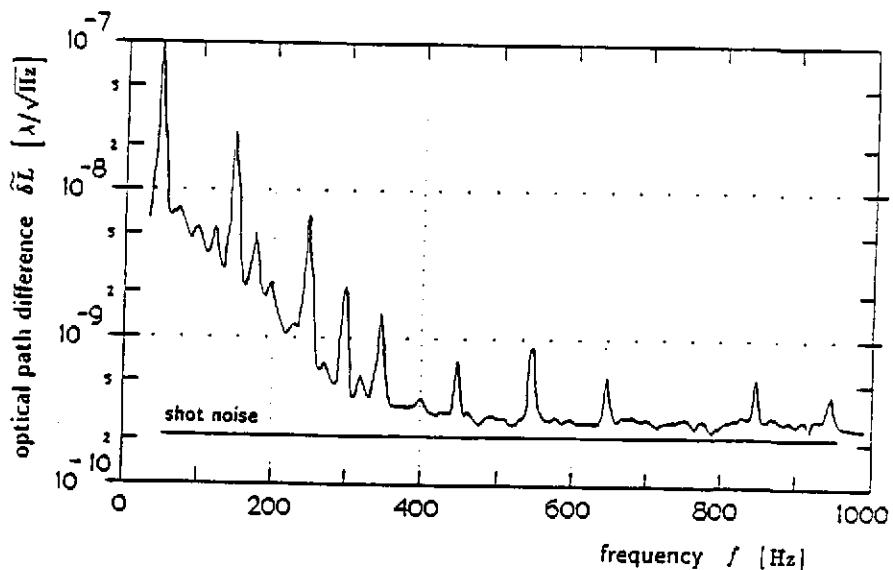


Figure 7 : Noise spectrum of the 30-cm test interferometer. The horizontal line represents the calculated shot noise for the experimental conditions. The regularly spaced peaks are caused by electrical disturbances from harmonics of the 50 Hz line frequency.

References

- [1] J. Weber: *Evidence for discovery of gravitational radiation*, Phys. Rev. Lett. 22 (1969) 1320-1324
- [2] H. Billing, P. Kafka, K. Maischberger, F. Meyer, W. Winkler: *Results of the Munich-Frascati gravitational-wave experiment*, Lett. Nuovo Cimento 12 (1975) 111-116
- [3] V.B. Braginsky, K.S. Thorne: *Present Status of Gravitational-Wave Experiments*, Proc. Ninth Int. Conf. on General Relativity (GR9), Jena 1980, Ed. E. Schmutz, Cambridge University Press (1983) 239-253
- [4] MG4: Proceedings of the Fourth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, Ed. R. Ruffini, Rome 1985, Elsevier(1986)
- [5] M.E. Gertsenshtain, V.I. Pustovoit: *On the detection of low frequency gravitational waves*, Sov. Phys.-JETP 16 (1963) 433-435
- [6] R. Weiss: *Electromagnetically coupled broadband gravitational antenna*, Quarterly Progress Report, Research Laboratory of Electronics, MIT 105 (1972) 54-76
- [7] R.L. Forward: *Wideband laser interferometer gravitational radiation experiment*, Phys. Rev. D 17 (1978) 379-390
- [8] J. Livas, R. Benford, D. Dewey, A. Jeffries, P. Saulson, D. Shoemaker, R. Weiss: *The MIT prototype gravitational wave detector*, MG4 (1986) 591-597
- [9] G.P. Newton, J. Hough, G.A. Kerr, B.J. Meers, N.A. Robertson, H. Ward, J.B. Mangan, S. Hogan: *Some improvements to the Glasgow gravitational wave detector*, MG4 (1986) 599-604
- [10] R. Spero: *The Caltech laser-interferometric gravitational wave detector*, MG4 (1986) 615-620
- [11] A. Brillet, C.N.R.S., *Private communication* (1986)
- [12] D. H. Shoemaker, W. Winkler, K. Maischberger, A. Rüdiger, R. Schilling and L. Schnupp: *Progress with the 30 m prototype for an interferometric gravitational wave detector*, MG4 (1986) 605-614
- [13] H. Ward et al.: *The Glasgow gravitational wave detector - present progress and future plans*, Proc. Intern. Symposium on Experimental Gravitational Physics, Guangzhou, PR China, 1987; World Scientific (Singapore), in press
- [14] H. Billing, W. Winkler, R. Schilling, A. Rüdiger, K. Maischberger, and L. Schnupp: *The Munich gravitational wave detector using laser interferometry*, in *Quantum Optics, Experimental Gravitation, and Measurement Theory*, Eds. P. Meystre, M.O. Scully, Plenum Press New York (1983) 525-566
- [15] W. Winkler, K. Maischberger, A. Rüdiger, R. Schilling, L. Schnupp, D. H. Shoemaker: *Plans for a large gravitational wave antenna in Germany*, MG4 (1986), 621-630

- [16] H. Billing, K. Maischberger, A. Rüdiger, R. Schilling, L. Schnupp, and W. Winkler: *An argon laser interferometer for the detection of gravitational radiation*, J. Phys. E: Sci. Instrum. 12 (1979) 1043-1050
- [17] D. Herriot, H. Kogelnik, R. Kompfner: *Off-axis paths in spherical mirror interferometers*, Appl. Opt. 3 (1964) 523-526
- [18] W. Winkler: *Eine optische Verzögerungsleitung für ein Breitband-Gravitationswellenexperiment*, Ph.D. Thesis, München 1983, see also Internal Report MPQ 74
- [19] P. Lindsay, P. Saulson, R. Weiss: *A study of a long baseline gravitational wave antenna system*, MIT, Cambridge MA (1983)
- [20] W. Winkler: *A laser interferometer to search for gravitational radiation*, Proc. Intern. Meeting on Experimental Gravitation, Pavia 1976, Accademia Nazionale dei Lincei, Rome (1977) 351-363
- [21] A. Rüdiger, MPQ, *unpublished calculations* (1981)
- [22] K. Maischberger, A. Rüdiger, R. Schilling, L. Schnupp, W. Winkler, H. Billing: *Noise investigations in a laser interferometer for the detection of gravitational radiation*, Proc. Second Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, Trieste 1979, Ed. R. Ruffini, North-Holland Publ. Co. (1982) 1083-1100
- [23] J.R. Hutchinson: *Vibrations of solid cylinders*, ASME J. Appl. Mech. 47 (1980) 901-907
- [24] R. Weiss, MIT, *Private communication* (1982)
- [25] D. Dewey, *A search for astronomical gravitational radiation with an interferometric broad band antenna*, Thesis, MIT, (1986)

2E) Développement d'un laser Nd:YAG stabilisé

Introduction

La limite fondamentale de mesure, celle du bruit de photons, a déjà été mentionnée. Il est apparent qu'il faut chercher les sources laser qui donnent une puissance élevée; dans la section 1B, on a vu qu'une puissance de l'ordre d'un kilowatt dans l'interféromètre sera nécessaire pour avoir l'espoir de voir un taux d'événements raisonnable. On peut trouver des moyens de réduire la puissance brute nécessaire ('recyclage', mentionné dans la section 1B), mais on a finalement besoin de plusieurs dizaines de watts, avec les stabilités en puissance et en fréquence stipulées dans la section 1C.

Jusqu'à présent, les maquettes d'interféromètres étaient illuminées par des lasers à Argon. Ce laser, bien développé pour les buts industriels, est disponible avec une puissance multifréquence de vingt watts. Les tentatives pour obtenir des puissances plus importantes ont entraîné pour les lasers des durées de vie très courtes, et on n'attend pas d'autres améliorations dans l'avenir.

Les lasers Argon sont des lasers à gaz ionisé; la résonance atomique subit un élargissement inhomogène à cause de la vitesse thermique des atomes. Le résultat est que la puissance maximale est réduite à quelque cinq watts avec l'introduction d'un étalon qui limite l'oscillation à un seul mode longitudinal. Le rendement des lasers à Argon est limité par le système de pompage (émission dans le gaz Argon lui-même) à quelques pour mille; et les systèmes commerciaux ont un rendement d'à peu près 10^{-4} . On peut imaginer un réseau de lasers à Argon, tous asservis et ajoutés en phase, pour arriver aux puissances suffisantes; mais la faiblesse de ce rendement, le coût initial, et la durée de vie limitée des tubes lasers (< 3000 h), rendent un tel arrangement peu pratique.

Une alternative très attractive est le laser à YAG (Grenat d'Yttrium et d'Aluminium) dopé avec du néodyme. Sur une forte pression de la demande industrielle, des progrès rapides dans la puissance disponible (plusieurs kilowatts) et l'efficacité (de l'ordre de plusieurs pour cent) ont été réalisés. Cependant, il reste plusieurs problèmes à résoudre: en général, le faisceau de sortie n'est pas monomode transverse ou longitudinal. Donc les bruits en fréquence et en puissance sont excessifs

140 Caractéristiques du système atomique Néodyme dans l'hôte YAG

et pas encore bien analysés ou contrôlés. Comme nous le verrons, on peut éviter la source de nombreux problèmes en séparant les caractéristiques de stabilité et puissance: on peut faire un oscillateur laser de référence, très bien stabilisé, qui – avec la technique d'asservissement par injection – sert de maître à un laser de puissance Nd:YAG conventionnel [Man'84].

Nous allons discuter les caractéristiques des lasers Nd:YAG en général, puis plus en détail, les aspects théoriques et expérimentaux concernant le laser de référence que nous avons construit. La revue de Danielmeyer [Danielmeyer'75] a été très utile dans la préparation de notre commentaires généraux.

Caractéristiques du système atomique Néodyme dans l'hôte YAG

Le YAG a plusieurs caractéristiques qui en font un hôte avantageux pour l'ion Nd³⁺. La structure cristalline donne une raie homogène puisque pour un dopage faible (moins de 1.5%), tous les sites de Néodyme sont identiques. La transition laser (dipolaire électrique de type 4f^N) qui serait ailleurs interdite par les règles de sélection de la mécanique quantique, est permise grâce à la configuration 'acentrique' du cristal qui mélange les états de parités opposées [Judd'62]. La conductivité thermique est forte, la fabrication est 'facile', et ses propriétés optiques sont bonnes (transparence, dureté, facilité de polissage etc.).

Le Néodyme étant une terre rare, existe en qualité d'ion Nd³⁺ dans la matrice YAG, avec deux couches d'électrons qui protègent les niveaux optiques 4f³ des champs locaux du cristal. Ce fait aide à maintenir une raie homogène. Les fluorescences les plus fortes ont lieu à partir du niveau excité $^4F_{3/2}$, en particulier vers le niveau $^4I_{1/2}$ ($1.064\mu m$), qui est la transition laser qui nous intéresse; voir le schéma des niveaux énergétiques (Figure 2E1). Cette transition a un élargissement homogène qui vient de l'excitation thermique de la structure du cristal, avec une largeur Lorentzienne de quelque $5 \cdot 10^{-10} m$ pour un dopage d'environ 1 pour cent. La fluorescence de l'état excité peut être perturbée de deux façons: la migration, sans perte d'excitation, qui sera discutée dans la sous-section *Les fluctuations en puissance*, et le phénomène d'autoextinction: il s'agit d'une transition de $^4F_{3/2} \rightarrow ^4I_{15/2}$; l'énergie qui reste va exciter un autre atome dans le schéma $^4I_{9/2} \rightarrow ^4I_{15/2}$, donc l'état excité est perdu pour l'action laser. Cependant, cet effet ne devient important que pour des dopages élevés de l'ordre de 1.5 pour cent [Danielmeyer'71], i.e., plus haut que dans le cas présent. Enfin, l'état excité, avec sa durée de vie de $230\mu s$, est presque complètement disponible pour l'action laser. L'état du bas, $^4I_{11/2}$, est éloigné de 2111 cm^{-1} du niveau fondamental $^4I_{9/2}$, et

par conséquent est très peu peuplé aux températures normales. En plus, le temps moyen de désexcitation pour ce niveau, $< 10^{-6}$ s, est court par rapport aux autres transitions du système. En conclusion, l'ion Nd³⁺ dans le cristal YAG est un système laser classique à quatre niveaux. Ceci aboutit à un laser efficace avec un seuil faible et facile à analyser.

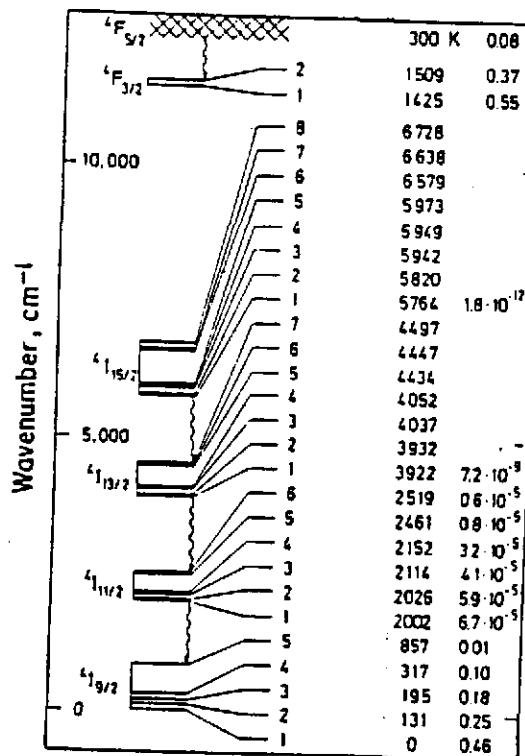


Figure 2E1: Niveaux d'énergie du Néodyme dans l'hôte Nd:YAG. De gauche à droite: le niveau, l'énergie, et la population à la équilibre thermique [Danielmeyer'75]

Les caractéristiques statiques du laser Nd:YAG

Pour l'analyse du système laser nous suivons Danielmeyer [Danielmeyer'75]. Il y a en fait deux transitions entre l'état supérieur $^4F_{3/2}$ et l'état inférieur $^4I_{11/2}$ qui nous intéressent: la transition $^4F_{3/2}(1) \rightarrow ^4I_{11/2}(2)$ que nous abrégeons par ef, et $^4F_{3/2}(1) \rightarrow ^4I_{11/2}(2)$ que nous abrégeons par gh. Voir le tableau 2E1, et l'esquisse des niveaux (la figure 2E1).

transition	$^4F_{3/2}(1) \rightarrow ^4I_{11/2}(2)$	$^4F_{3/2}(2) \rightarrow ^4I_{11/2}(3)$
nomenclature	e → f	g → h
longueur d'onde λ	1.0639 μm	1.0643 μm
section efficace σ	$4.6 \cdot 10^{-24} \text{ m}^2$	$8.0 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2$
importance relative	0.60	0.40

Table 2E1 : niveaux et nomenclature

Les deux transitions sont confondues à la température ambiante, et forment ensemble la raie 1.064 μm. On a défini la section efficace d'émission stimulée, valable pour le cas de l'élargissement homogène

$$\sigma_{\text{ef}} = \frac{\lambda_{\text{ef}}^2 A_{\text{ef}}}{4\pi^2 n^2 \Delta\nu_{\text{ef}}}$$

où λ est la longueur d'onde de la transition, A la probabilité de transition (coefficient d'Einstein), n l'indice optique du cristal, et $\Delta\nu$ la largeur de la raie. A l'équilibre thermique, les populations des états sont distribuées ainsi :

$$\frac{N_e}{N_g} = e^{h(\nu_e - \nu_g)/kT} ; \quad \frac{N_f}{N_h} = e^{h(\nu_f - \nu_h)/kT} .$$

Prenons un taux de pompage $R(r)$ (qui est une fonction de la distance r à l'axe de la cavité optique), égal aux nombre d'états 'e' et 'g' pompés par unité de volume et par unité de temps, et une intensité de lumière à cause de l'émission stimulée dans le milieu $I(r)$. A l'équilibre, on a

$$R(r) = (A_e N_e + A_g N_g) + \frac{I(r)}{h\nu_y} [\sigma_{\text{ef}}(N_e - N_f) + \sigma_{\text{gh}}(N_g - N_h)] .$$

Le taux de pompage est égal aux pertes des états excités. On peut perdre des états excités par deux processus : celui des transitions spontanées, et celui des transitions induites. Nous avons introduit ν_y , la fréquence moyenne des transitions laser. On peut définir un gain effectif σN pour les deux transitions par $\sigma N = \sigma_{\text{ef}}(N_e - N_f) + \sigma_{\text{gh}}(N_g - N_h)$. En termes de taux de pompage $R(r)$ et d'intensité stimulée $I(r)$,

$$\sigma N = \frac{R(r)\sigma_{\text{eff}}\tau_{\text{eff}} - (\sigma_{\text{ef}}N_e + \sigma_{\text{gh}}N_g)}{1 + \frac{I(r)}{h\nu_y}\sigma_{\text{eff}}\tau_{\text{eff}}}$$

où

$$\sigma_{\text{eff}} = b_e\sigma_{\text{ef}} + b_g\sigma_{\text{gh}} ; \quad \tau_{\text{eff}} = \frac{1}{b_e A_e + b_g A_g} ;$$

$$b_e = \frac{N_e}{N_e + N_g} ; \quad b_g = \frac{N_g}{N_e + N_g} .$$

Les grandeurs mesurables sont les valeurs effectives ; la durée de vie de fluorescence est $\tau_{\text{fl}} \equiv \tau_{\text{fl}} = 2.3 \cdot 10^{-4}$ s, et la section efficace $\sigma_{\text{eff}} = 3.4 \cdot 10^{-23}$ m².

Le point où l'intensité stimulée est égale à

$$I(r) = \frac{h\nu_y}{\sigma_{\text{eff}}\tau_{\text{fl}}} \equiv I_s$$

est intéressant : le gain effectif σN est divisé par un facteur deux ; on donne à I_s le nom d'intensité de saturation. La valeur numérique est $I_s = 23$ W · mm⁻².

Le seuil : Pour l'intensité zéro, nous avons

$$\sigma N(I=0) = R(r)\sigma_{\text{eff}}\tau_{\text{eff}} - (\sigma_{\text{ef}}N_e + \sigma_{\text{gh}}N_g) .$$

La condition de seuil est que le gain pour un aller-retour soit égal à l'unité :

$$e^{2\sigma/Nl} e^{-L} (1-T) = 1$$

où l est la longueur du cristal pompé, L représente les pertes distribuées dans la cavité, et T est la transmission du miroir de couplage. Dans les cas réalistes, L et T sont petits devant 1, et on peut écrire :

$$\sigma N \approx \frac{(L+T)}{2l} .$$

Le taux de pompage R_s au seuil est :

$$R_s = \frac{1}{\sigma_{\text{eff}}\tau_{\text{fl}}} \left[\frac{L+T}{2l} + (\sigma_{\text{ef}}N_e + \sigma_{\text{gh}}N_g) \right] .$$

L'efficacité de pompage de la fréquence ν_p est haute, c'est à dire que presque chaque photon pompé qui est absorbé aboutit à un état excité; donc, la densité de puissance de pompage (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$) est $H_s = h\nu_p R_s$ pour atteindre le seuil. Pour trouver la puissance il faut intégrer sur les coordonnées spatiales. Mais notons que c'est la puissance par unité de surface, et non pas la puissance totale, qui détermine le seuil.

La pente: On voit que la formule pour le gain effectif σN en termes de $R(r)$ et $I(r)$ implique que le pompage est le plus efficace quand la forme spatiale du faisceau pompe $R(r)$ et du faisceau laser $I(r)$ sont identiques. Si $R(r) \neq I(r)$, l'intégrale sur les dimensions spatiales $\int \sigma N dr d\theta dl$ ne peut pas atteindre sa valeur maximale, parce que il y aurait soit les états excités inutilisés, soit une partie du faisceau laser non pompée. Nous voudrions un laser de mode TEM₀₀, donc le faisceau de pompage optimal a la même géométrie. Dans ce cas optimal :

$$I(r) = \frac{2P_L}{\pi w^2} e^{-\frac{2r^2}{w^2}}$$

où $P_L = P/T$ est la puissance laser dans la cavité, P la puissance de sortie du laser; et

$$R(r) = \frac{R}{\pi w^2} e^{-\frac{2r^2}{w^2}}$$

est la densité de puissance du faisceau pompe. Intégrant $R(r)$ sur r et sur la longueur l de la région de pompage, on trouve une puissance de pompage W_p ; on calcule W_s de la même façon pour la puissance de pompage au seuil. On a enfin pour la puissance de sortie P_0 :

$$P_0 = (W_p - W_s) \frac{\nu_p}{\nu_y} \frac{T}{T + L} .$$

Prenons un exemple: pour une longueur pompée de $l = 3$ mm, et une cavité avec les pertes égale à la transmission du miroir de sortie, $L = T = 0.02$, le seuil est $R_s = 0.2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Pour un mode laser de rayon 0.2 mm, le volume du mode pompé est 3.8 mm^3 , ce qui donne une puissance de seuil de 73 mW. Avec les mêmes chiffres, on calcule $P_0 = 0.38 \cdot (W_p - 0.073)$ W pour la puissance de sortie de ce laser, ou à peu près 50 mW de puissance à $1.06 \mu\text{m}$ pour 200 mW de puissance pompée à $0.813 \mu\text{m}$. Le rendement pour un laser Nd:YAG pompé par lampe est de plusieurs ordres de grandeur plus petit, à cause de la géométrie de pompage non-optimale ($R(r) \neq I(r)$), mais surtout à cause de la petite proportion de la lumière pompe qui est accordée avec les bandes d'absorption du Nd:YAG.

Pompage

Il existe plusieurs bandes d'absorption pour le système Nd:YAG (voir figure 2E2). Les niveaux les plus bas qui puissent être utilisés pour faire un système à quatre niveaux sont les niveaux $^4F_{5/2}$ autour de 800 nm, mais on trouve des bandes importantes jusqu'à 350 nm. Cependant, l'irradiation du Nd:YAG avec des longueurs d'ondes plus courtes que 600 nm produit une dégradation sous la forme d'une forte absorption non radiative entre 300 nm et 600 nm dans le matériau YAG; donc les lampes ayant beaucoup d'énergie dans cette bande (la plupart des lampes à décharge) ne conviennent pas. Il reste les lampes à Xénon ou Krypton et les corps noirs comme sources incohérentes. Mais on a un problème plus général avec le pompage classique : celui du chauffage qui vient du fait que seulement quelques cinq pour cent de la puissance émise par la lampe tombent dans les raies d'absorption du Nd:YAG.

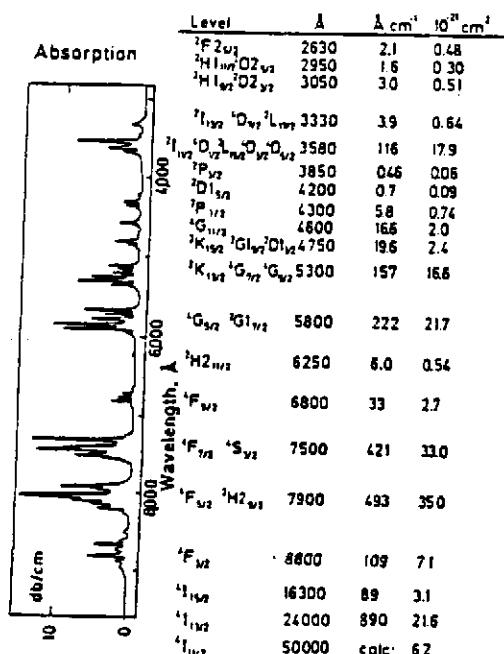


Figure 2E2: Bandes d'absorption du Néodyme dans l'hôte Nd:YAG

Ce chauffage a deux conséquences. Il faut enlever la chaleur avec un débit de liquide ou de gaz à la surface des lampes et du matériau YAG. Les turbulences qui en résultent induisent des mouvements du Nd:YAG, et aussi des fluctuations dans son indice optique, produisant des instabilités en puissance et en fréquence. Le deuxième problème vient de la sensibilité dans le matériau Nd:YAG de l'indice optique en fonction de la pression (coefficient élasto-optique), en conjonction avec l'expansion thermique.

La géométrie conventionnelle d'une tête Nd:YAG utilise un barreau cylindrique qui est entouré d'une ou plusieurs lampes disposées parallèlement au barreau dans une cavité réfléchissante. Il en résulte un gradient de température radial, et par conséquent un gradient d'indice dans le barreau Nd:YAG. Il y a deux conséquences : la première est la formation d'une lentille effective qui cause une focalisation du faisceau; la deuxième est l'apparition d'une birefringence asymétrique radiale qui affecte la polarisation de la lumière.

Un moyen de pompage qui évite plusieurs des problèmes mentionnés ci-dessus est l'emploi de diodes lasers. Les diodes GaAlAs peuvent être accordées sur une des bandes d'absorption très forte de Nd:YAG, afin que presque toute la puissance incidente sur le cristal soit utilisée pour exciter le système laser. Donc le rendement du laser est nettement amélioré, et le chauffage moins important. Malheureusement, le prix actuel des diodes lasers (une diode laser de quelques centaines de milliwatts coûte quelques dizaines de milliers de francs) n'autorise pas la fabrication de lasers Nd:YAG de puissance pompés par diode laser. On s'attend à ce que le prix baisse dans les années qui viennent. Mais pour le pompage des lasers Nd:YAG de petite puissance, les diodes sont déjà la meilleure solution.

On peut séparer les problèmes pratiques de pompage par diode laser en deux parties, celle du processus de l'excitation des états atomiques, et celle de l'optique.

L'excitation : Dans la figure 2E3 les bandes d'absorption pour le Nd:YAG dans le proche infra-rouge sont montrées avec le spectre mesuré d'une diode laser Spectra-Physics Laboratories *SDL 2420* de 200 mW de puissance maximum. La diode a plusieurs modes longitudinaux (d'écartement de 92 GHz, correspondant à l'intervalle spectral libre de la cavité), parce qu'il n'y a pas une fréquence atomique qui précise la fréquence d'oscillation; c'est la différence entre deux bandes d'énergie distribuées qui détermine les fréquences de lumière amplifiées [Yariv '76].

La fréquence de la lumière dépend de la température, à cause des changements dans la longueur physique du cristal et des changements d'écart entre les bandes

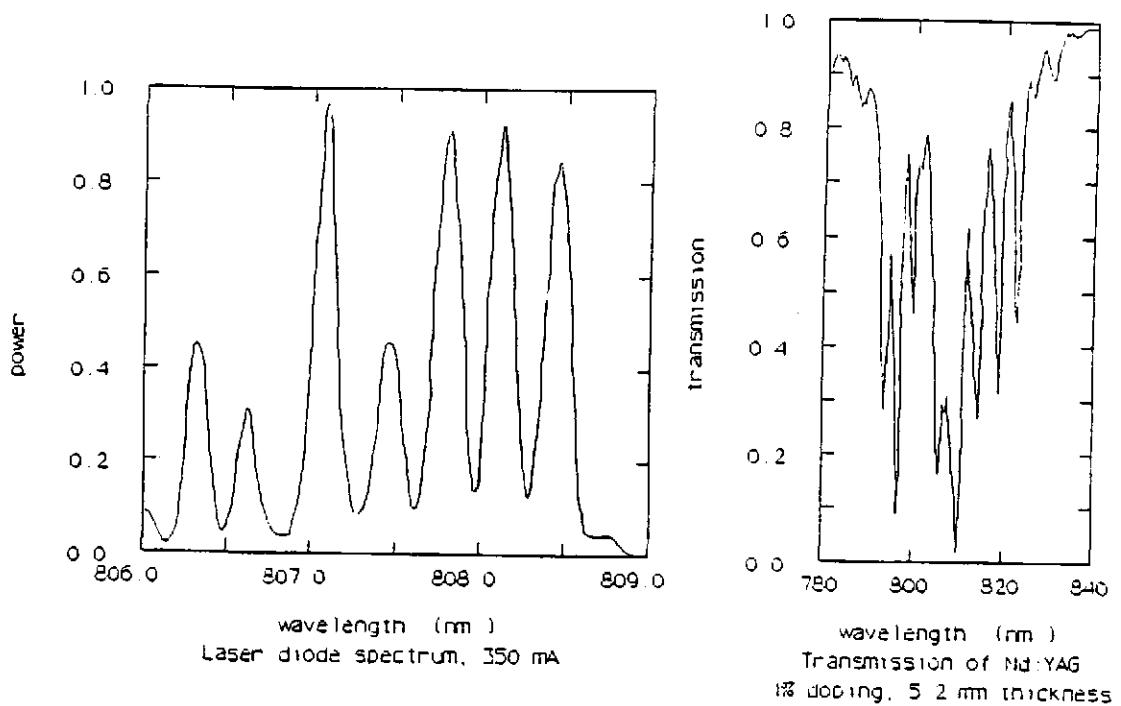


Figure 2E3: Spectre de la diode laser *SDL 2420* (à gauche) comparé avec les bandes d'absorption du Nd:YAG dans le proche infra-rouge.

qu'elle provoque; la figure 2E4 montre le spectre de la diode laser pour plusieurs températures. Le coefficient de température est de $d\lambda/dt = 0.25 \text{ nm}/^\circ\text{C}$. La diode laser est équipée avec un refroidisseur Peltier et une thermistance permettant un asservissement de la température. Cependant, la durée de vie de la diode laser est une fonction forte de la température, et on ne veut pas travailler avec des températures plus élevées que l'ambiante. La limite inférieure de température vient du refroidisseur Peltier, car l'efficacité du refroidisseur diminue quand le gradient de température entre ses deux faces augmente. Finalement, on peut accorder la fréquence sur une gamme d'à peu près 5 nm. Il faut que cette gamme de fréquence entoure la raie d'absorption désirée pour une température raisonnable.

La figure 2E5 montre la transmission de la lumière de la diode laser par un échantillon de Nd:YAG, dopé à 1.1%, d'épaisseur 3 mm, en fonction de la température (et donc de la fréquence) de la diode laser. Cette convolution du

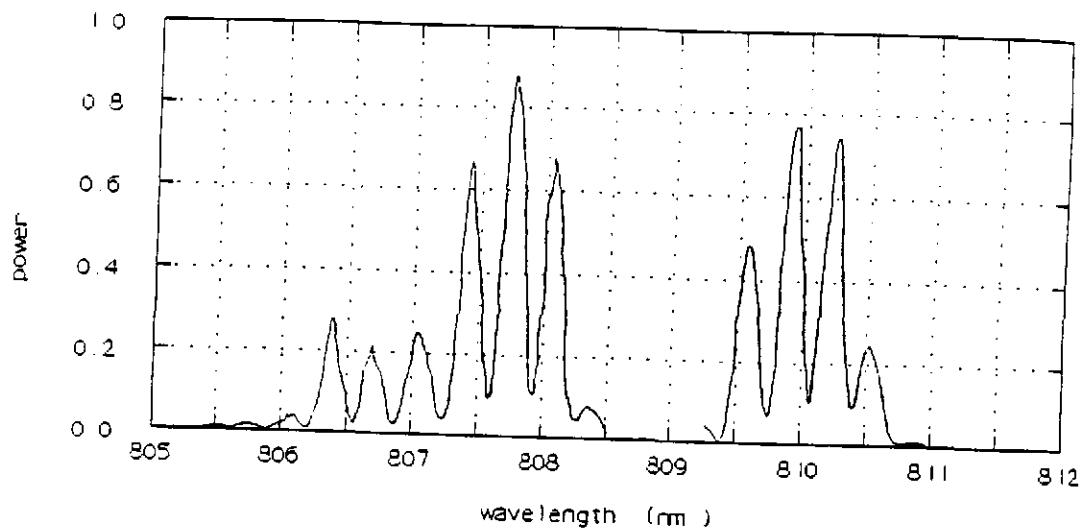


Figure 2E4 : Spectre de la diode laser *SDL 2420* pour deux températures différentes.
A gauche: 16° C. A droite: 25° C.

spectre de la diode laser et du spectre d'absorption du Nd:YAG donne une limite de l'efficacité optimale qu'on puisse obtenir; on trouve que le coefficient d'absorption (défini par $I(x) = I(x=0)e^{-\alpha x}$) est égal à $\alpha = 1/1.53 \text{ mm}^{-1}$ pour cette raie et cette diode laser.

Dans l'expression de la puissance P_0 du laser, le terme ν_p/ν_y donne la limite de l'efficacité de pompage, ce qui donne pour le système diode laser-Nd:YAG le facteur $0.808/1.06 = 0.76$.

L'optique: Le pompage longitudinal constitue la meilleure géométrie; voir la figure 2E6. Le faisceau de la diode laser est focalisé sur le cristal Nd:YAG. La cavité du laser Nd:YAG est quasi-hémisphérique. La face du cristal la plus proche de la diode laser possède un traitement dichroïque qui est transparent pour la lumière pompe ($T_{808 \text{ nm}} \approx 0.9$) mais réfléchissant pour le Nd:YAG ($R_{1.06 \mu\text{m}} \approx 0.992$).

Pour les raisons discutées ci-dessus, on veut un faisceau pompe qui ressemble à celui d'un laser Nd:YAG. Etant donné le fait que la longueur d'onde de pompage est proche de celle du laser Nd:YAG, on peut faire un faisceau pompe avec à peu près la même forme que le faisceau laser si le faisceau pompe est un faisceau

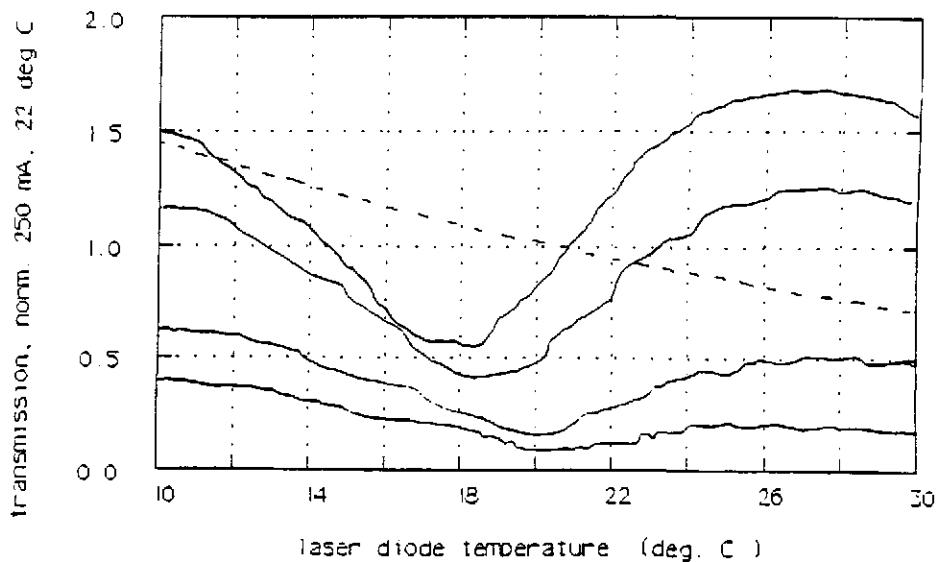


Figure 2E5 : Transmission de la lumière de la diode laser par un échantillon de Nd:YAG en fonction de la température de la diode laser, pour plusieurs courants à travers la diode laser (330 mA, 300 mA, 250 mA, 230 mA). La ligne droite montre l'intensité sans échantillon Nd:YAG, 250 mA.

gaussien TEM₀₀. Cependant, le faisceau d'une diode laser est plus compliqué. La forme du faisceau, déterminée par la forme de la région active (voir la figure 2E7), est asymétrique.

La majeure partie de notre expérience a été faite avec une diode laser qui consiste en dix lasers asservis en phase, comme illustré dans la figure 2E7. La phase lumineuse entre les raies individuelles alterne entre 0 et π (c'est le mode pour lequel l'énergie est la plus basse [Butler'84]), et chaque raie a un faisceau qui ressemble à celui d'une diode laser simple. Le faisceau résultant est assez compliqué. Dans la direction perpendiculaire au plan des raies (x dans la figure), il est à peu près gaussien, avec un angle de divergence (l'angle entre l'axe du faisceau et l'angle où la puissance est réduite d'un facteur $1/e^2$) de ≈ 0.25 radian; l'intensité en y en 'champ-lointain' pour plusieurs courants est montrée dans la figure 2E8. La forme change avec le courant, vraisemblablement parce que les

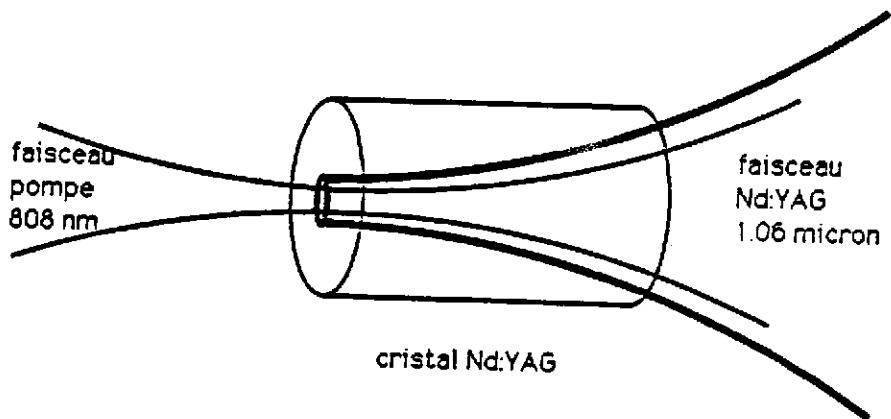


Figure 2E6 : Géométrie du pompage longitudinal

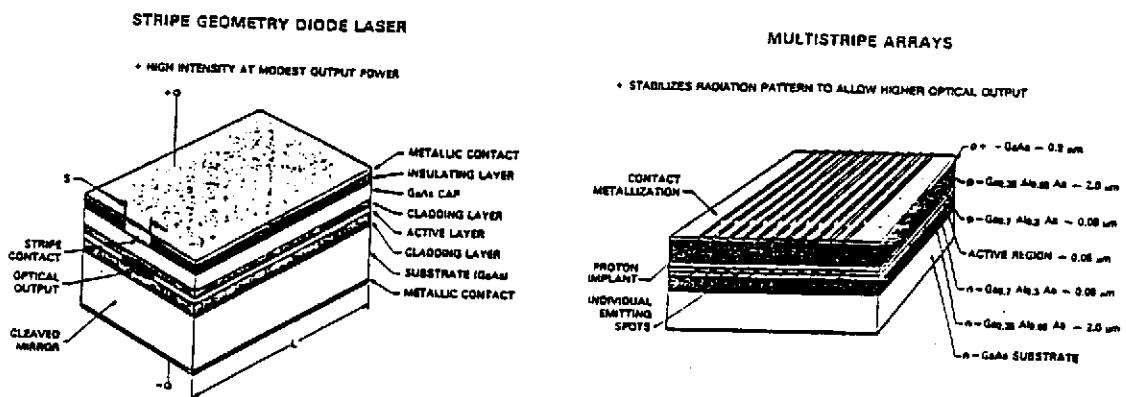


Figure 2E7 : Laser diode simple (à gauche), et multi-élément (à droite) [Spectra Diode Laboratories]

raies individuelles ne sont pas identiques et les lasers individuels mal asservis en phase pour les courants les plus faibles. L'angle de divergence, bien qu'il ne soit pas strictement défini, est de l'ordre de ≈ 0.075 rad.

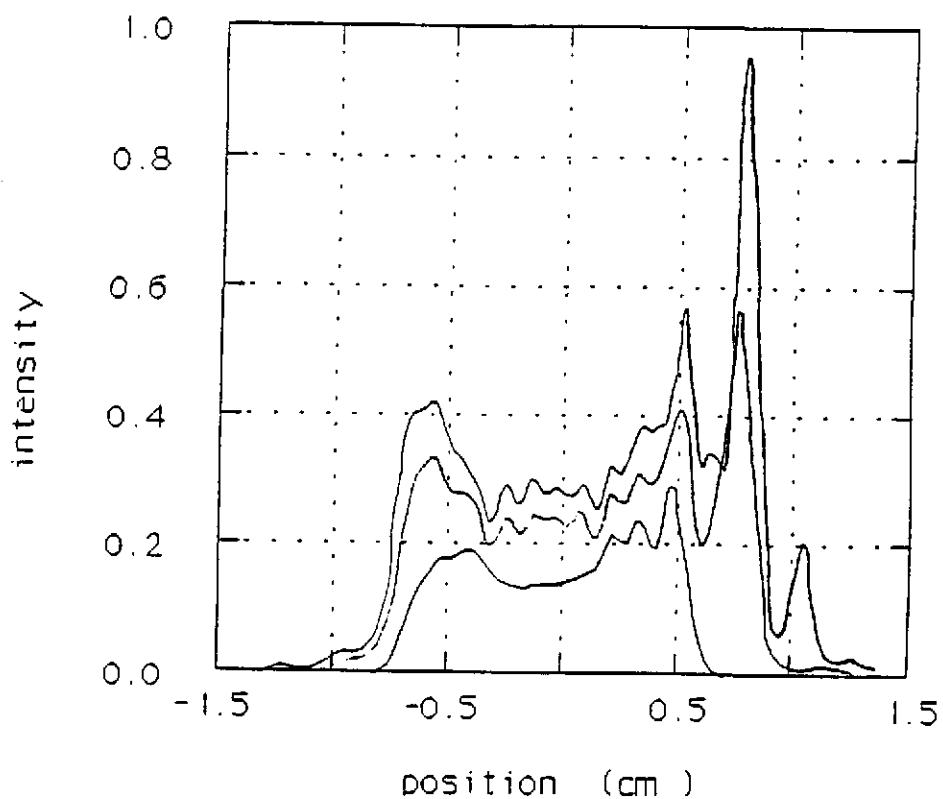


Figure 2E8 : Intensité pour plusieurs courants en fonction de la position, transversalement au faisceau diode laser, dans la direction y

Nous avons réalisé un système de focalisation asymétrique pour produire un faisceau dont la dimension dans le Nd:YAG est plus petite que le mode laser, en utilisant une lentille cylindrique [Scifres'82]. Voir la figure 2E9. On peut modéliser le faisceau diode laser par deux sources gaussiennes, une en x et une en y , avec les origines x_0 , y_0 et tailles w_x , w_y ajustées pour reproduire aussi bien que possible le faisceau réel (où la 'taille' est définie comme la distance entre l'axe du faisceau et le point où l'intensité est réduite d'un facteur $1/e^2$). Selon la direction x , on trouve une position de source coïncidant avec la face de la diode laser et de taille

$w_z = 1.35 \mu\text{m}$; selon la direction y , la source est localisée à l'arrière de la face ($y_0 = z_0 - 0.66 \text{ mm}$) et de taille $w_0 = 50 \mu\text{m}$. Puis, avec les techniques d'optique matricielle 'abcd' on peut suivre, et manipuler, les deux faisceaux. La première lentille L_1 doit ramasser toute la lumière, donc elle a une grande ouverture; la contrainte qui est donnée par le fait qu'il existe une fenêtre après la diode laser, détermine la longueur focale minimum. On place le foyer de la lentille à peu près sur la face de la diode, donc le faisceau en x est à peu près parallèle. Par contre, le faisceau en y converge à 0.10 m après la diode; quand il a atteint le même diamètre que le faisceau en x , 0.42 m après la diode, une lentille cylindrique L_c de focale 0.25 m dans la direction y focalise ce faisceau, produisant un faisceau de section à peu près circulaire. Finalement, la lentille L_2 de focale 48 mm est choisie pour produire un faisceau dans le cristal Nd:YAG, qui a la même taille (ou un peu plus petit) que le mode du laser Nd:YAG dans la région de pompage.

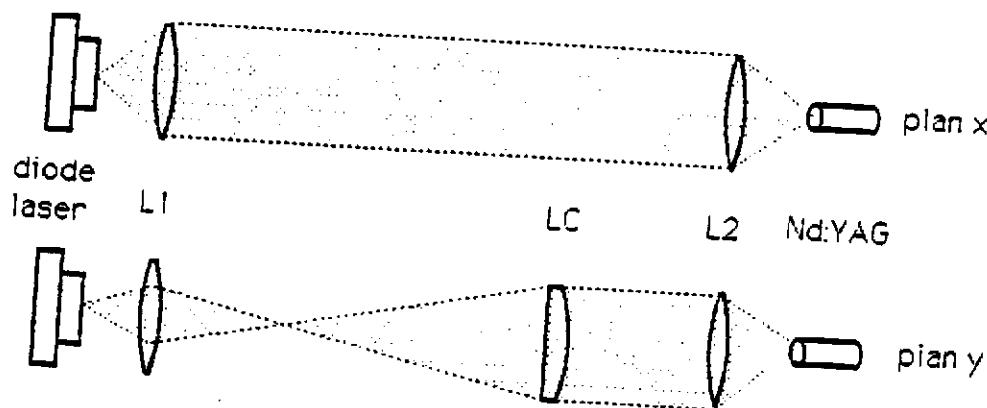


Figure 2E9: Système de focalisation pour le faisceau diode laser

Nous avons fait des mesures de la forme du faisceau (c'est à dire de l'intensité en fonction de la position) dans la région de focalisation. Une photodiode était équipée avec un trou de $5 \mu\text{m}$ de diamètre, et était balayée dans la direction transverse au faisceau. La figure 2E10 montre plusieurs points au foyer et après le foyer de la lentille L_2 , dans la direction y . Les pics sont les images des faisceaux des lasers individuels de la diode laser. La figure 2E11 montre le résultat pour x .

Encore, on peut faire un modèle pour le faisceau de pompage, en plaçant cette fois l'origine au foyer de L_2 (le point de diamètre minimum sur l'axe x); on a $x_0=0$ (par définition), $w_x=10 \mu\text{m}$, $y_0 \approx x_0$, et $w_y=30 \mu\text{m}$.

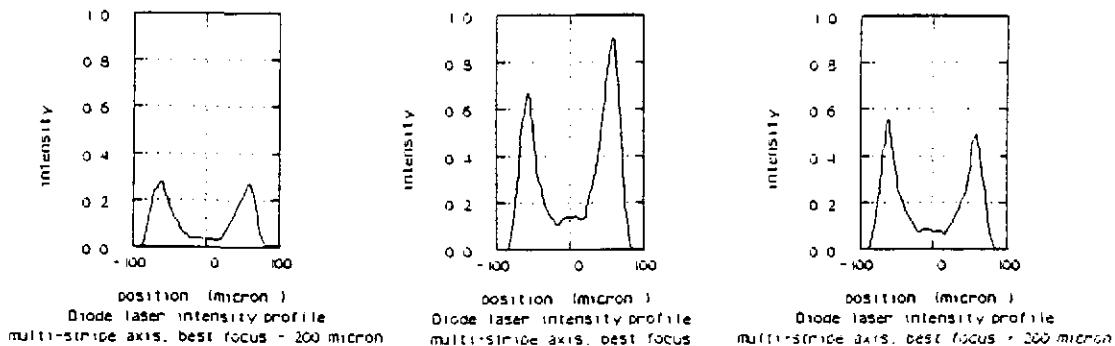


Figure 2E10: Cartes de l'intensité dans une section transversale au faisceau dans la direction y , pour plusieurs distances au foyer de L_2

Pour étudier les questions de géométrie de pompage, nous avons fait une cavité qui permet de changer facilement le diamètre (et ainsi le volume) du faisceau laser dans la région de pompage. Pour une cavité quasi-hémisphérique, la taille du faisceau sur la surface du cristal Nd:YAG est :

$$w_0 = \left[\frac{\lambda^2 l}{\pi^2 (R - l)} \right]^{1/4}$$

où R est le rayon de courbure du miroir de couplage, et l la distance entre les deux surfaces réfléchissantes (tenant compte du fait que le cristal Nd:YAG présente un indice élevé). Evidemment, si l approche de R , w_0 devient plus petit; en fait, la cavité devient instable dans le cas $R = l$. En mesurant la divergence θ du faisceau laser Nd:YAG, définie comme le demi-angle entre le centre du faisceau et le point où l'intensité tombe jusqu'à $1/e^2$, on peut déduire w_0 :

$$w_0 = \frac{\lambda}{\pi \theta} .$$

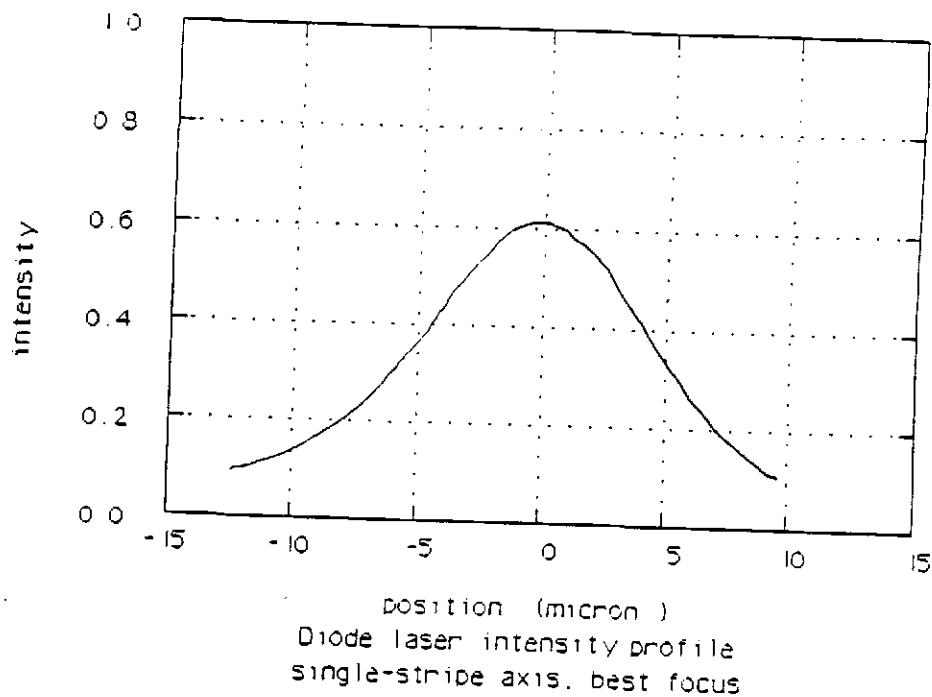


Figure 2E11: Carte de l'intensité dans une section transversale au faisceau dans la direction x au foyer de L_2

Dans le cas de la cavité testée, le diamètre du faisceau Nd:YAG reste à peu près constant dans le cristal Nd:YAG. Avec une lentille de $R = 300$ mm, nous avons trouvé la longueur de cavité optimale, près du point $R = l$, avec $w_0 = 96 \mu\text{m}$. Voir la figure 2E12 où l'on trouve une représentation en deux dimensions des faisceaux pompe et laser pour les deux directions y et z . La perte en intensité du faisceau pompe, due à l'absorption, est indiquée; l'intensité tombe d'un facteur ≈ 600 après la traversée du cristal.

Opération Monomode spatial: Si on permet au faisceau pompe de devenir plus grand que le faisceau Nd:YAG TEM₀₀, on voit plusieurs modes spatiaux, à cause du gain important pour les autres modes. On peut arriver à des efficacités raisonnables sans franchir cette limite, donc l'obtention du fonctionnement TEM₀₀ ne pose pas de problème particulier.

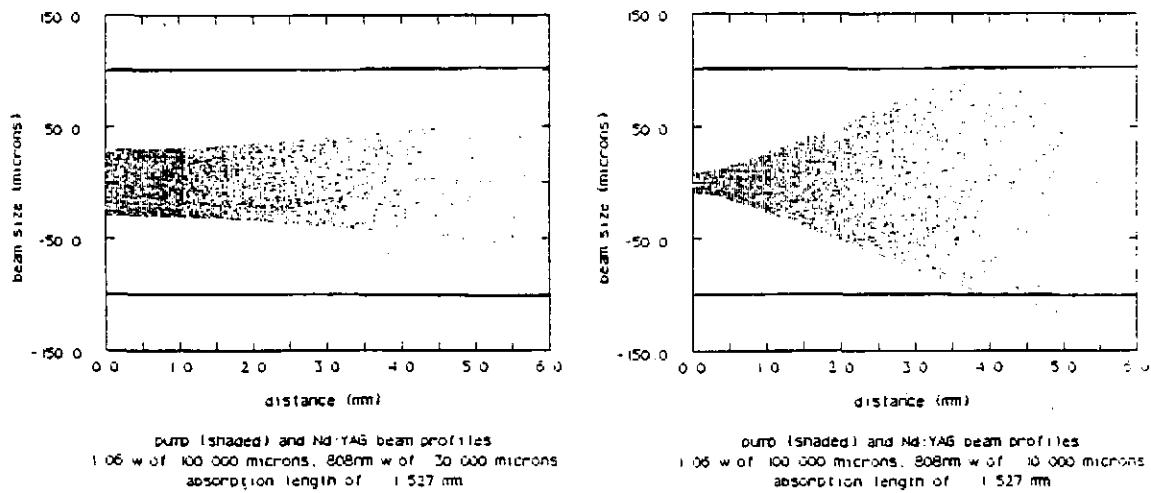


Figure 2E12: Faisceaux pompe et laser Nd:YAG dans le cristal Nd:YAG. A gauche: dans le plan y . A droite: dans le plan x .

Opération monofréquence

Creux spatiaux de gain

Bien que la courbe de gain du Nd:YAG soit assez large (quelques 0.5 nm) pour un dopage d'environ 1 pour cent), on s'attend pour ce système laser à un fonctionnement monomode longitudinal, parce que l'élargissement de la transition laser est homogène. Cependant, il y a une complication alliée à la nature 'état-solide' du milieu laser : le phénomène de 'modulation spatiale du gain' (*spatial hole burning*) : une onde électromagnétique stationnaire dans le cristal épouse sélectivement les états excités aux maxima du champ électrique (où l'intensité est au maximum), produisant une réduction du gain en ces points; par contre, aux minima du champ électrique, les états excités restent disponibles. On a donc une modulation sinusoïdale de l'inversion de population, de période $\lambda/2$, qui tend à diminuer la saturation du gain des autres modes.

Il y a un processus qui aide à améliorer cette situation, celui de la migration d'énergie (*energy migration*). Dans le milieu Nd:YAG, l'interaction dipolaire électrique produit un couplage entre les états [Danielmeyer'71], ce qui permet le transfert d'un état d'excitation à un atome voisin sans perte d'énergie. La durée

de vie pour ce transfert est $\tau_m = 3 \cdot 10^{-7}$ s, et doit être comparée avec la durée de vie de l'état excité ${}^4F_{3/2}$ de $\tau = 2.3 \cdot 10^{-4}$ s. Donc, un état excité peut migrer quelque mille fois avant de se désexciter par fluorescence. Cette marche aléatoire de l'excitation entre les sites atomiques (écartés par $d_a \approx 1.8$ nm) produit une diffusion de $d \cdot \sqrt{\tau/\tau_m} \approx 50$ nm, ce qui réduit le contraste de la modulation spatiale de gain. Cette distance reste cependant petite par rapport à $\lambda/4 = 250$ nm. Donc ce processus réduit quelque peu la modulation de gain, mais ne peut pas éliminer entièrement cet effet.

Cavité linéaire, cristal au milieu: La géométrie de cavité la plus désavantageuse de ce point de vue serait un milieu amplificateur (le cristal Nd:YAG) centré dans une cavité linéaire (voir la figure 2E13); prenons un cristal court en comparaison avec la longueur de la cavité. Dans ce cas, les modes voisins $n \pm 1, 3, 5 \dots$ ont les maxima de champ électrique presque exactement sur les minima du mode original n ; les modes voisins sont très proches en fréquence ($f_{n \pm 1} = f_n \pm c/2l$, avec $f_n \approx 10^5 \cdot c/2l$), donc ils tombent facilement dans la courbe de gain.

Pour observer ce mode de fonctionnement, nous avons fait un résonateur en 'V' (montré dans la figure 2E13), contenant seulement un cristal Nd:YAG traité avec une surface réfléchissante. Le laser oscille en deux modes différents par $\Delta n = 1$ pour presque tous niveaux de pompage; très près du seuil, il oscille dans un seul mode.

Cavité linéaire, cristal à l'extrémité: La situation s'améliore beaucoup si l'on place le cristal au bout de la cavité (de longueur l) (voir la figure 2E14). Dans ce cas, les modes voisins ont des maxima proches de ceux du mode principal; la condition que les maxima d'un mode concurrent soient sur le mode principal dans le cristal de longueur d est remplie pour $\Delta n = l/2d$, ce qui donne un ordre de grandeur pour le mode le plus proche en fréquence attendu. Les chiffres caractéristiques donnent $\Delta n \approx 5$ à 10, qui correspond à $\Delta\lambda \approx 0.1$ nm. Cela tombe toujours dans la courbe de gain du Nd:YAG pour deux ou trois modes de chaque côté du mode principal. Par la suite nous discutons en détail des expériences réalisées avec ce type de cavité.

Cavité en anneau: La solution la plus élégante consiste à supprimer la possibilité de mode stationnaire, en faisant une cavité en anneau qui oscille dans une seule direction. Voir la figure 2E15 pour la configuration que nous avons réalisée. Le cristal Nd:YAG est soumis à un champ magnétique; l'activité magnétique du

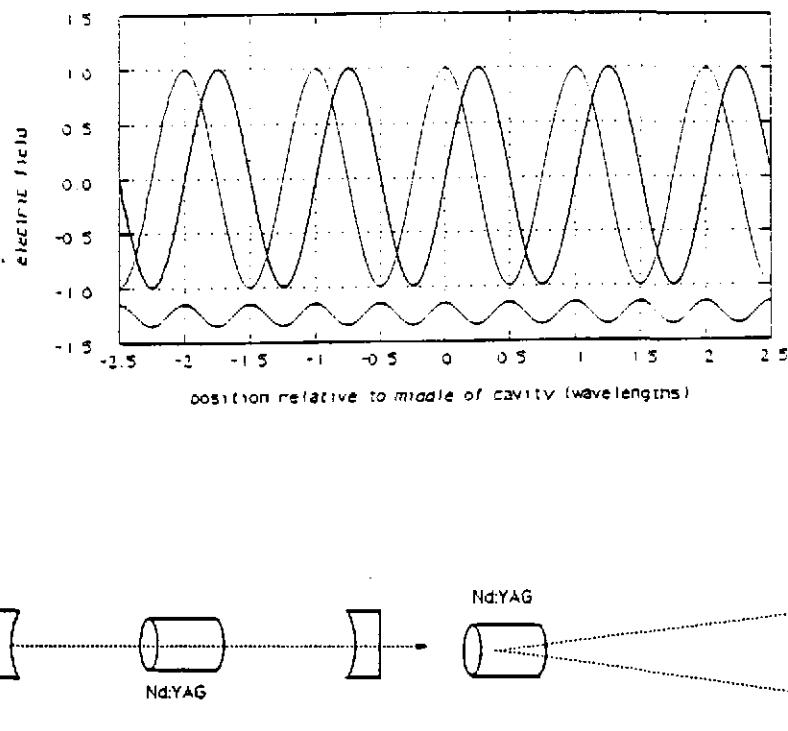
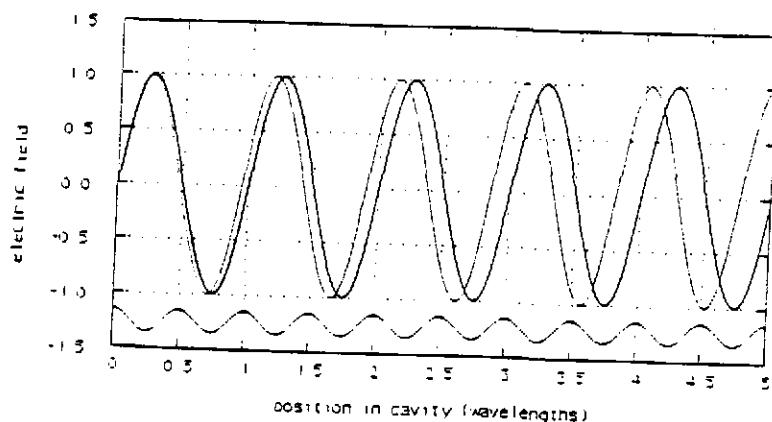


Figure 2E13: Cavité laser avec milieu de gain centré; champ électrique pour le mode principal et le mode voisin en haut. En bas : cavité schématique (à gauche), et arrangement expérimental (à droite)

Nd:YAG (la constante de Verdet est $1.8 \text{ T}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ donne une rotation Faraday de $\theta_f = 6.6 \cdot 10^{-3}$ rad, vérifiée dans une expérience en polariseurs croisés. Le fait que le chemin optique ne soit pas plan donne une rotation ordinaire de l'état de polarisation de la lumière [Biraben'79], qui pour une direction de propagation annule la rotation Faraday, et pour l'autre s'ajoute à la rotation Faraday. La lame à l'angle de Brewster sélectionne une seule polarisation linéaire. L'ensemble des trois composants forme une 'diode optique' qui réduit le gain dans une direction par rapport à l'autre. Étant un système homogène (sans la complication des creux spatiaux de gain), le laser Nd:YAG oscille exclusivement dans la direction 'facile'.



Nd:YAG



Figure 2E14: Cavité laser avec milieu de gain au bout; champ électrique pour le mode principal et le mode voisin en haut. En bas: cavité schématique.

Le laser en anneau a permis de vérifier nettement l'homogénéité du gain : le spectre se compose d'une seule raie pour n'importe quel niveau de pompage. Si on autorise les deux directions d'oscillation (en supprimant le champ magnétique), on aperçoit deux modes avec un écart de un intervalle spectral libre de la cavité. Malheureusement, nous avons dû abandonner cette cavité pour des raisons pratiques. D'abord, le pompage doit être sur l'un ou l'autre des chemins dans le cristal Nd:YAG, ce qui divise le gain par deux. D'autre part, on augmente les pertes en augmentant le nombre de surfaces réfléchissantes, et il en résulte une perte d'efficacité. En plus, les problèmes de mécanique et d'alignement rendent les expériences difficiles.

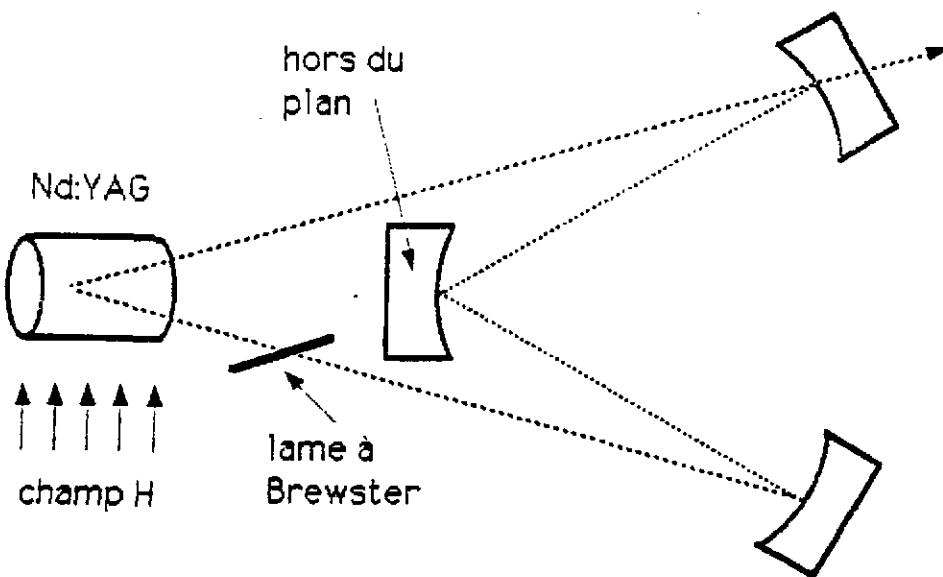


Figure 2E15 : Cavité en anneau

Cavité linéaire avec étalon : Nous avons choisi pour le système d'étude une cavité linéaire avec le cristal Nd:YAG au bout, et avec un étalon dans la cavité pour rejeter les modes parasites autorisés par la modulation spatiale de gain. L'étalon, qui est lui-même une cavité Fabry-Perot monolithique, imprime une modulation des pertes dans le laser. La transmission d'un Fabry-Perot est donnée par [Born'75]

$$T = \left(1 - \frac{A}{1-R}\right)^2 \left(1 + \frac{4\mathcal{F}^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{2\pi n \nu l}{c}\right)^{-1}$$

où les réflectivités R et les pertes en puissance A des deux surfaces sont identiques ($R + A + T = 1$), n est l'indice optique de la matière, l l'épaisseur, ν la fréquence laser, et $\mathcal{F} = \pi\sqrt{R}/(1-R)$ est la finesse. La difficulté est de trouver une optimisation compte tenu des deux exigences : 1) Que les fréquences des modes parasites du laser tombant dans la courbe de gain soient supprimées; et 2) Que le mode désiré du laser ne subisse pas de perte de gain, même pour un petit changement de fréquence. Une illustration visuelle se trouve sur la figure 2E16. La courbe de gain, les modes parasites (dus à la modulation spatiale de gain, écartés par ≈ 10 modes longitudinaux de la cavité), et la fonction d'Airy pour notre étalon,

sont indiqués. L'étaillon est en silice, de 0.7 mm d'épaisseur, avec des surfaces non-traitées; le saut d'indice optique ($n=1$ à $n=1.5$) donne une réflectivité en incidence normale de $[(n - 1)/(n + 1)]^2 = 0.04$.

Nous n'avons pas mesuré la transmission maximale de l'étaillon, mais les pertes sur les surfaces non-traitées devraient être faibles; et le fonctionnement (le seuil et la pente) du laser avec l'étaillon perpendiculaire au faisceau n'est pas changé. Par contre, si l'étaillon est mis sous un angle tel que l'opération monofréquence est assurée, le seuil devient plus grand d'un facteur 1.6 et la pente est réduite d'un facteur 1.3.

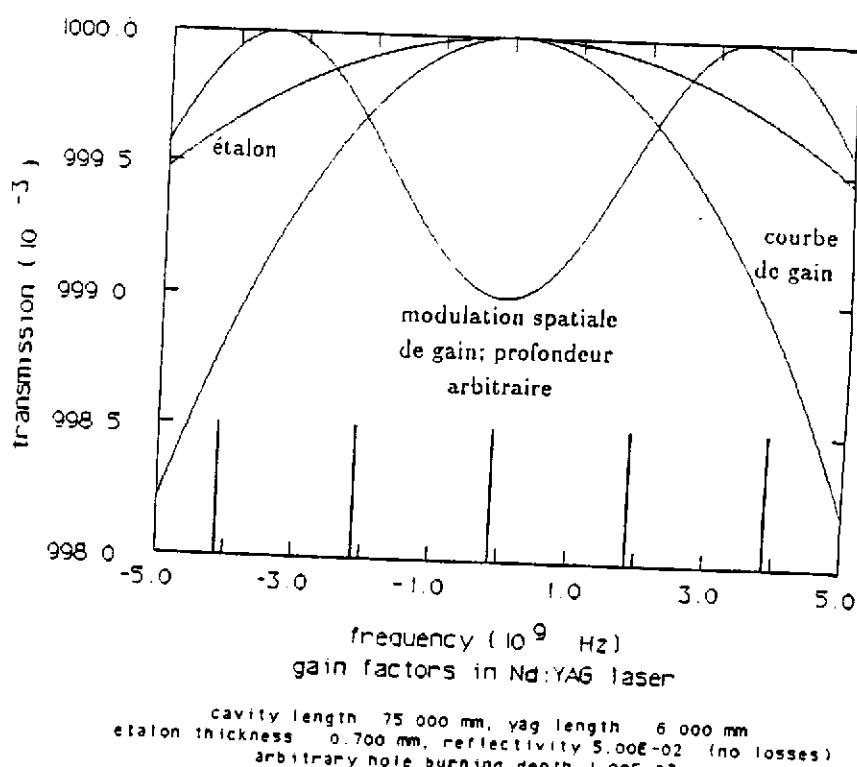


Figure 2E16: Différentes sources de modulation de gain

L'état de polarisation

Pour notre application, nous souhaitons que l'onde laser soit polarisée linéairement; cela permet l'emploi des modulateurs électro-optiques et des fenêtres à l'angle de Brewster, parmi d'autres avantages. L'état de polarisation du laser Nd:YAG n'est pas déterminé par la structure du cristal si le cristal ne subit pas des contraintes mécaniques externes (c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'anisotropie intrinsèque).

L'état de polarisation du faisceau de pompage induit légèrement une polarisation pour le laser Nd:YAG parallèle à la polarisation de la diode laser. Pour montrer cette dépendance, nous avons fait tourner la polarisation du laser pompe (qui est polarisé par contraction), et l'état de polarisation du laser Nd:YAG a été mesuré. On trouve une polarisation elliptique du faisceau Nd:YAG avec un rapport d'à peu près $x/y = 0.7$, avec l'axe principal aligné sur l'axe de polarisation du faisceau pompe.

Plus importants sont les phénomènes liés à la sensibilité de l'indice optique à la pression mécanique. Parce que les constantes élasto-optiques pour des directions différentes ne sont pas identiques, une pression sur le cristal induit une birefringence. Ceci donne des axes privilégiés et aussi des longueurs optiques différentes, donc des fréquences d'oscillations différentes pour les deux directions de polarisation.

Pour observer cet effet, on applique une pression sur un côté du cristal cylindrique en serrant une vis; le faisceau laser est analysé avec un polariseur à un angle $\pi/4$ par rapport aux axes induits, et l'on observe une modulation d'intensité à la fréquence de battement entre les deux états de polarisation. Pour notre cristal de longueur de 6 mm, une force correspondant à plusieurs dizaines de grammes cause une fréquence de battement de plusieurs MHz (une différence en longueur optique de quelques 10^{-10} m). Autrement dit, si on veut que la fréquence de battement reste plus basse que nos signaux astrophysiques (disons 100 Hz), les forces résiduelles sur le cristal doivent être inférieures à $\approx 100 \mu\text{g}$ (moins que le poids du cristal!), ce qui n'est pas réaliste.

Notre solution consiste à produire une autre contrainte, plus forte que celle venant du cristal, sur l'axe de polarisation dans la cavité laser. Une lame à l'angle de Brewster suffit; et si le cristal Nd:YAG est tenu d'une façon qui évite les pressions asymétriques inutiles, il n'y a pas de perte introduite dans le laser (i.e., le seuil et la pente restent les mêmes avec ou sans la lame à l'angle de Brewster).

Résumé

Nous avons abouti à une forme simple et flexible pour un laser Nd:YAG monomode spatial et en fréquence : il s'agit d'une cavité linéaire, avec le milieu amplificateur à une extrémité, pompé par une diode laser. Il est maintenu monomode en fréquence par un étalon, et dans un état de polarisation linéaire par une lame à l'angle de Brewster. Dans les sections suivantes, nous allons caractériser les bruits de puissance et de fréquence, et introduire les asservissements nécessaires pour supprimer ces bruits.

Les fluctuations en puissance

Les sources de bruit

Le bruit de grenaille : Ce bruit (omniprésent dans ce mémoire) a été décrit dans la section *Sources de bruit*. Il donne la limite pratique de notre mesure des fluctuations de puissance, et en plus il est la source la plus fondamentale de bruit de puissance.

L'oscillation de relaxation : Dans le système laser il y a un couplage entre l'inversion de population et les photons dans la cavité. De l'énergie peut être échangée de façon périodique entre des deux moyens de stockage, avec un temps caractéristique dépendant des systèmes atomiques et de la cavité. Dans la section précédente, nous avons établi une expression pour $R(r)$, le taux de pompage par unité de volume à l'équilibre. En simplifiant pour une seule raie atomique, on a

$$0 = R(r) - \frac{N}{\tau_q} - \frac{I(r)}{h\nu_y} \sigma N$$

où $\tau_q = 1/A$. L'intensité de lumière laser dans la cavité est en moyenne

$$I = \frac{2P}{\pi w^2}$$

pour un rayon w du mode. Soit $\psi = \int_{vol} R(r)$ le taux de pompage, soit $\dot{n} = \frac{d}{dt}(n)$ les fluctuations autour de la moyenne:

$$\dot{n} = \psi - \frac{n}{\tau} - \frac{2P}{\pi w^2 h \nu_y} \sigma n .$$

Pour un laser de puissance de sortie $P \cdot T$, où T est la transmission du miroir de couplage, le nombre de photons p dans la cavité de longueur l est

$$p = \frac{P}{h\nu} \cdot \tau_c, \quad \tau_c \equiv \frac{2l}{c} .$$

Utilisant les définitions données dans la section précédente, on définit la durée de vie d'émission stimulée τ_{st}

$$\tau_{st} = \frac{\pi w^2}{2\sigma_{eff}} \frac{\tau_c}{p} ;$$

on peut maintenant écrire

$$\dot{n} = \psi - \frac{n}{\tau} - \frac{pn}{\tau_{st}} .$$

C'est un résultat intuitivement raisonnable : le nombre des états excités augmente avec le taux de pompage, décroît par émission spontanée (τ) proportionnellement au nombre d'états n , et diminue aussi par émission stimulée (τ_{st}) proportionnellement au nombre d'états n mais aussi avec le niveau de stimulation, c'est à dire avec le nombre de photons p .

La population des photons augmente par l'émission stimulée, mais diminue par les pertes L dans la cavité et à travers la transmission du miroir de couplage T . Chaque aller-retour de temps $2l/c$ cause une perte de $n \cdot (T + L)$ photons; donc, on peut définir une durée de vie pour les photons dans la cavité

$$\tau_q = \frac{2l}{c(T + L)} .$$

Enfin, le nombre de photons dans le système laser est

$$\dot{p} = \frac{pn}{\tau_{st}} - \frac{p}{\tau_q} .$$

Les équations pour \dot{n} et \dot{p} sont couplées; pour les petites perturbations δ , on obtient un comportement oscillatoire amorti, de la forme

$$p(t) = p_0 + \delta p e^{-at} \cdot e^{i(\omega_0^2 - a^2)^{1/2}t}$$

où en fréquence,

$$p(\omega) = p(0) + \frac{\delta(\omega)}{\left[\left(1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - a^2} \right) \right)^2 + \left(\frac{a}{\omega_0} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_q \tau_{st}}} \text{ et } a = \frac{1}{\tau_q} + \frac{1}{\tau_{st}} .$$

Notons que τ_{st} est une fonction du niveau de pompage (à cause de sa dépendance en p , nombre de photons dans la cavité). Mis sous une forme plus accessible pour l'expérience, les deux paramètres d'oscillation sont

$$\omega_0 = \left[\frac{2\sigma}{\tau_q \pi w^2 h \nu_y T} \right]^{1/2} \cdot P_0^{1/2}$$

et

$$a = \frac{1}{\tau_q} + \left[\frac{\sigma}{\pi w^2 h \nu_y T} \right] \cdot P_0 ,$$

$P_0 = P \cdot T$ étant la puissance de sortie du laser. Notons que les oscillations sont plus hautes en fréquence et mieux amorties pour les puissances P_0 grandes. Il est intéressant de voir l'ordre de grandeur de ces termes. Pour les propriétés du Nd:YAG ($\sigma = 3.4 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2$, $\tau_R = 2.3 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, $h\nu_y = 2 \cdot 10^{-19} \text{ J}$) et les conditions typiques ($T=0.01$, $L=0.02$, $l=0.10 \text{ m}$, ainsi $\tau_q = 2.2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$; et $w=100 \mu\text{m}$, on trouve $\omega_0 \approx 7 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{P_0}$ et $a \approx 2.2 \cdot 10^3 + 5.4 \cdot 10^5 \cdot P_0$, avec P_0 en W; $P_0=10 \text{ mW}$ donne une oscillation autour de 100 kHz qui 'sonne' durant à peu près 10 cycles après une excitation.

N'importe quel phénomène qui perturbe l'oscillation laser peut exciter cette oscillation de relaxation. Les fluctuations en puissance de la diode laser sont la source primaire d'excitation large-bande. Chacune des raies de la diode laser fonctionne en régime multi-mode longitudinal et montre ses propres oscillations de relaxation. Le bruit de puissance du laser diode résultant est blanc jusqu'à au moins plusieurs centaines de kilohertz, et pour 200 mW de puissance de pompage, le niveau est $\Delta I/I = 10^{-5} \text{ Hz}^{-\frac{1}{2}}$. Le coefficient de couplage observé entre ces fluctuations de pompage et l'oscillation de relaxation est de l'ordre de l'unité pour les fréquences basses. De même les perturbations acoustiques ou mécaniques (discutées ci-dessous) pourraient exciter cette oscillation de relaxation, mais c'est plus difficile de donner un chiffre pour le couplage.

La figure 2E17 montre ce bruit en fonction de la fréquence pour plusieurs niveaux de pompage, comparé aux prévisions théoriques. La dépendance de la fréquence ω_0 avec la puissance de sortie P_0 est en bon accord avec les prévisions; le niveau tombe un peu plus rapidement qu'attendu.

Les perturbations acoustiques et mécaniques : La majeure partie du couplage entre les perturbations acoustiques et mécaniques et les fluctuations de puissance, doit passer à travers la modulation de fréquence qui en est le résultat direct. Puis, un élément sélectif en fréquence (l'étalon par exemple) produit un changement en puissance, linéaire ou non, à cause de cette modulation de fréquence. On peut imaginer aussi un couplage direct à cause de la modulation de l'alignement. Les isolations acoustiques et mécaniques passives peuvent aider beaucoup. L'environnement idéal serait une plate-forme suspendue comme un pendule, dans une enceinte à vide; cette solution peut être envisagée, mais n'a pas encore été appliquée.

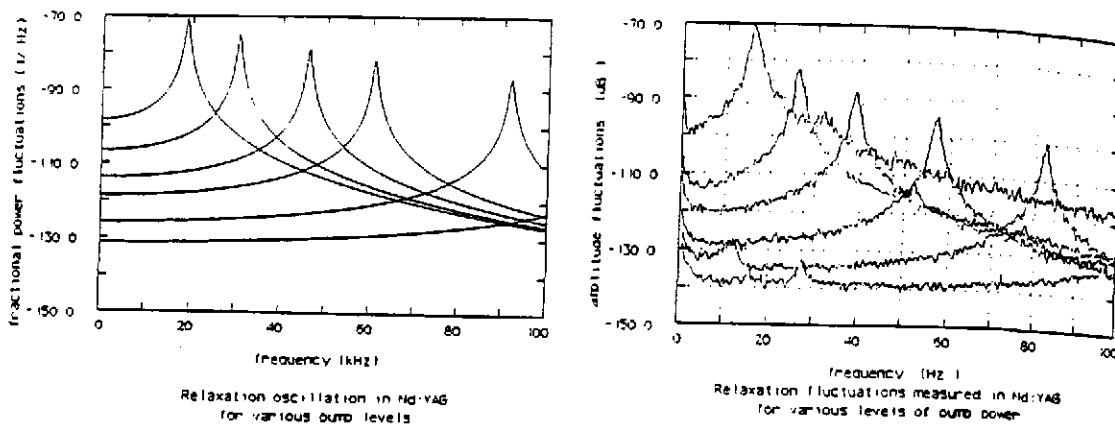


Figure 2E17: Spectres, calculé et mesuré, des fluctuations de puissance à cause des oscillations de relaxation

L'asservissement du bruit de puissance

Pour faire l'asservissement, il faut détecter les fluctuations de puissance, amplifier et conditionner le signal, et puis agir d'une manière ou d'une autre sur la puissance. La mesure des fluctuations est relativement simple: une photodiode polarisée donne une bande-passante suffisante (quelque 10^6 Hz). La commande sur la puissance peut être effectuée de plusieurs façons. Nous en discutons deux.

L'asservissement de la diode laser: Comme nous l'avons mentionné, le bruit de puissance de la diode laser est une source importante d'excitation des oscillations de relaxation. Donc, il serait désirable de réduire ce niveau de bruit; de plus, on peut imaginer d'employer ce moyen de contrôle pour asservir aussi la puissance laser Nd:YAG.

La puissance totale du faisceau pompe est une fonction linéaire du courant à travers la diode, et la bande-passante est très large (quelque 10^9 Hz). Mais le bruit de puissance de chacune les raies est indépendant, faisant du bruit une fonction de la position dans le faisceau laser diode; et il semble que le fait de modifier le courant de la diode laser modifie aussi la répartition d'intensité entre les différents modes longitudinaux (ainsi que la géométrie du faisceau). Il en résulte que l'effet d'un asservissement de la puissance de la diode laser sur la stabilité de la puissance du laser Nd:YAG est plutôt imprévisible.

Ce phénomène est illustré dans la figure 2E18; l'enregistrement à gauche montre le spectre de courant dans la photodiode utilisée dans la boucle d'asservissement, avec et sans asservissement, où l'on observe la suppression du signal d'erreur. Le spectre de droite montre le bruit dans le faisceau diode laser (mesuré sur une deuxième photodiode externe de la boucle d'asservissement) avec et sans asservissement du bruit de la diode laser; on voit une augmentation du bruit quand le laser est asservi.

Le deuxième problème vient des oscillations de relaxation. Si on inclut le milieu Nd:YAG dans une boucle d'asservissement pour circonvenir le problème mentionné ci-dessus, la réponse oscillatoire du milieu joue un rôle dans la fonction de transfert de la boucle. Il n'est pas pratique d'ajouter un filtre compensateur parce que les caractéristiques de l'oscillation de relaxation sont des fonctions des paramètres (variables) du laser Nd:YAG.

L'asservissement avec un modulateur acousto-optique : Une méthode plus attrayante emploie un modulateur acousto-optique. Jusqu'à des fréquences comparables à l'inverse du temps de transit d'une onde acoustique entre le transducteur et le milieu du faisceau ($\approx 1 \mu\text{s}$), l'intensité de lumière diffractée par effet Bragg est une fonction linéaire de l'amplitude des ondes acoustiques [Yariv'76]. Cette amplitude est réglée en changeant le niveau de l'oscillateur qui contrôle le modulateur. Un mélangeur est employé pour changer le niveau de l'oscillateur qui contrôle le cristal acousto-optique. Les autres éléments du système d'asservissement sont identiques avec l'asservissement de fréquence, discuté dans la sous-section suivant. La bande-passante du système est à peu près 200 KHz; la figure 2E19 montre un spectre du bruit de puissance du laser Nd:YAG libre et asservi.

Les fluctuations de fréquence

La limite fondamentale du bruit de fréquence est déterminée par la nature statistique du nombre de photons dans la cavité [Schawlow'58]. Le mouvement des miroirs à cause du bruit thermique (voir la section *Sources de bruit*) est une autre source certaine des fluctuations de fréquence. Une troisième source interne de bruit vient des oscillations de relaxation : si la fréquence d'oscillation du laser n'est pas centrée sur la fréquence de la transition atomique, l'indice optique est une fonction de l'inversion de population. Ceci donne une sensibilité de la longueur optique, et par conséquence de la fréquence, aux oscillations de relaxation. Jusqu'à maintenant, toutes nos mesures ont été dominées par deux autres bruits : aux basses

résonance ω_m . Ceci permet le calcul d'un mouvement à cause d'une force $\delta P_r \cdot A_m$; la perturbation résultante de la fréquence laser (avec une cavité de longueur l) est

$$\delta f \approx \frac{c}{\lambda l} \frac{\delta P_r A_m}{\omega_m^2 M_m}$$

ce qui donne pour quelques chiffres typiques ($A_m = 10^{-3} \text{ m}^2$, $M_m = 10^{-1} \text{ kg}$, $\omega_m = 2\pi \cdot 1000 \text{ Hz}$, $l = 10^{-1} \text{ m}$) encore $\delta f \approx 100 \text{ Hz}$ pour le seuil auditif.

Ces chiffres donnent naturellement seulement l'ordre de grandeur des effets. Le niveau de bruit pour tous les deux, bruits mécaniques et acoustiques, monte rapidement lorsque la fréquence diminue. Un spectre du bruit de fréquence du laser Nd:YAG est montré dans la figure 2E25.

L'asservissement en fréquence

La mesure des fluctuations de fréquence : Nous employons une cavité Fabry-Perot en réflexion ([Pound'46], [Drever'83]) pour convertir les changements de fréquence en changements de puissance, qui peuvent être détectés avec une photodiode. Une esquisse du système de mesure est donnée dans la figure 2E20. Un schéma modulation-démodulation, identique en principe à celui décrit dans la section *Détection de signal*, est employé pour garantir que la mesure est faite aux fréquences où le bruit en puissance est limité par le bruit de photons. Une cellule de Pockels PC impose à la lumière une modulation en phase à haute fréquence. Le faisceau qui est polarisé linéairement, passe à travers le séparateur de polarisation SP et est converti à la polarisation circulaire par la lame ' $\lambda/4$ '. La lentille L sert à adapter le faisceau laser au mode TEM₀₀ de la cavité Fabry-Perot. La lumière réfléchie est de polarisation circulaire opposée, et après avoir traversé la lame $\lambda/4$, prend une polarisation linéaire, orthogonale à la polarisation originelle, et est réfléchie par le séparateur. Cette lumière tombe sur la photodiode PD, et le photocourant résultant est converti en tension par l'amplificateur Amp, et démodulé par le mélangeur M. La phase de la modulation haute-fréquence de la lumière réfléchie est une forte fonction de la différence de fréquence entre la fréquence de résonance de la cavité Fabry-Perot et la fréquence de la lumière

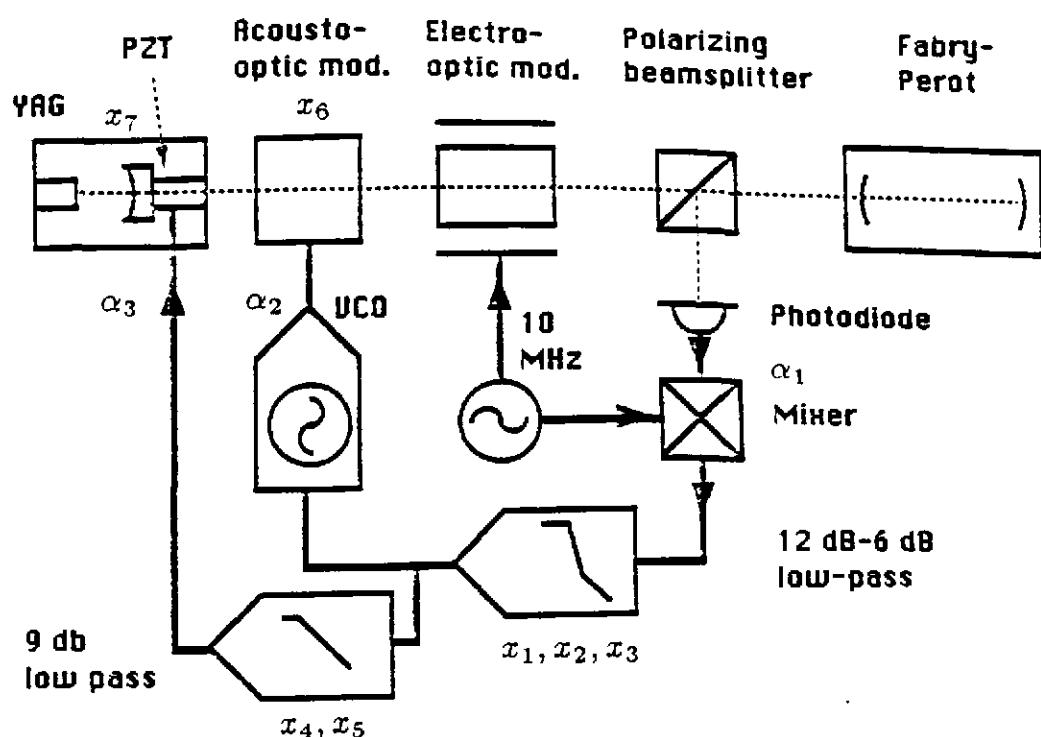


Figure 2E20 : Schéma du système d'asservissement de la fréquence du laser Nd:YAG

incidente. Le rapport signal-bruit attendu est calculé dans l'article *A frequency-stabilised laser-diode pumped Nd:YAG laser* qui est annexé à cette section.

Le contrôle de fréquence.: La fréquence du laser est corrigée différemment pour les fréquences basses et hautes (voir la figure 2E20). Pour les fréquences supérieures à plusieurs centaines de hertz, le modulateur acousto-optique AO est utilisé. Le faisceau laser diffracté est déplacé en fréquence et en angle par rapport au faisceau entrant. Le déplacement en fréquence est égal à la fréquence de modulation fournie par l'oscillateur VCO; cette fréquence peut être changée avec une tension de contrôle. La bande-passante des corrections est limitée encore à plusieurs centaines de kHz par le retard dû au modulateur acousto-optique. Un désavantage de ce moyen de contrôle est le mouvement du faisceau qui est associé aux changements de fréquence : le coefficient de couplage est $1.6 \cdot 10^{-10} \text{ rad} \cdot \text{Hz}^{-1}$.

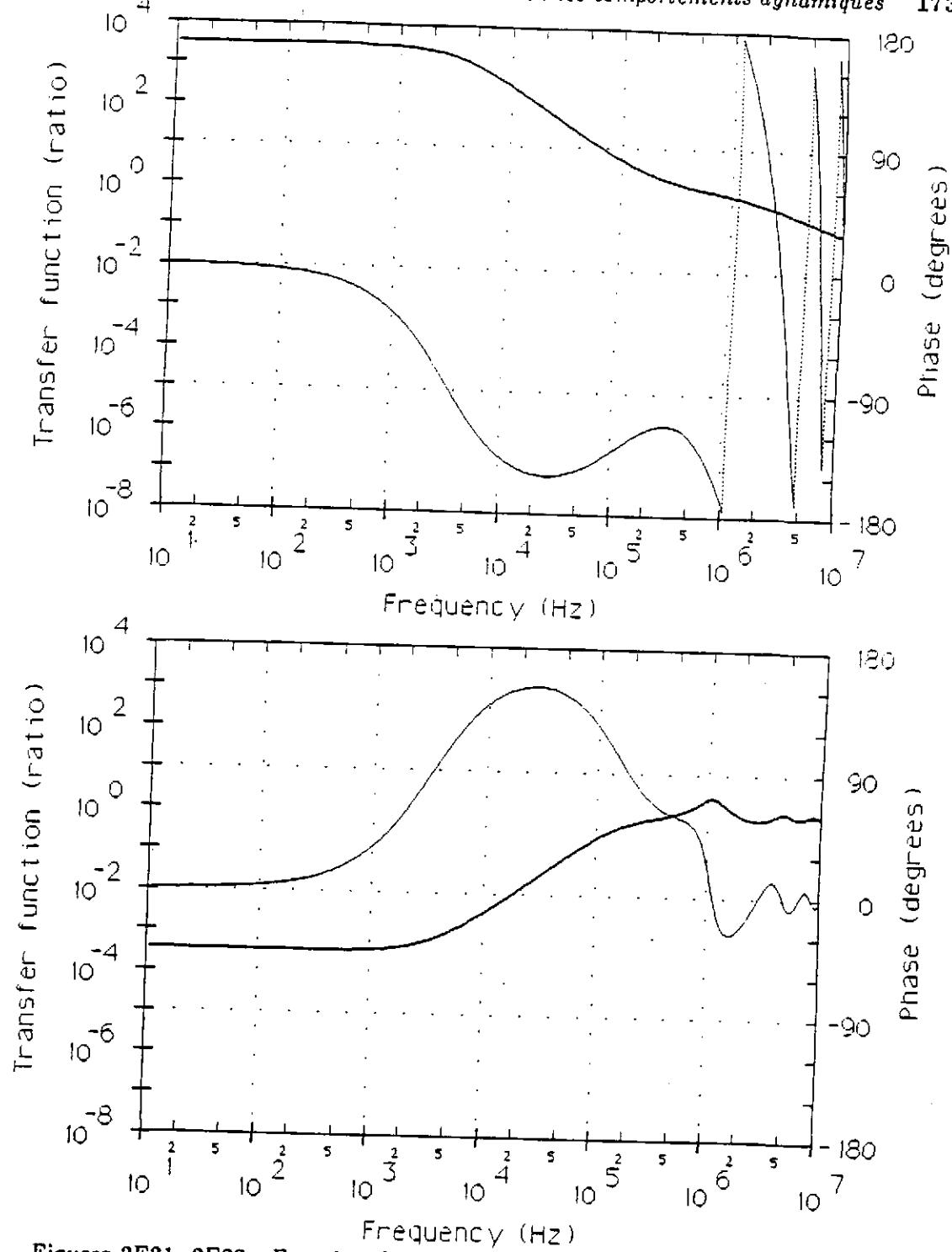
On peut faire passer le faisceau laser deux fois à travers le modulateur acousto-optique, dans les directions inverses; les mouvements s'annulent et le déplacement en fréquence est doublé, mais la transmission optique devient faible.

Pour les corrections aux fréquences plus basses, un transducteur piezo-électrique PZT est utilisé pour changer la longueur de la cavité. Cela donne une plage dynamique très grande, et en plus cela réduit les corrections à effectuer par le modulateur acousto-optique (et donc réduit les mouvements du faisceau). Le gain maximal dans cette boucle est limité à environ 1 kHz par les résonances mécaniques de l'ensemble miroir-PZT.

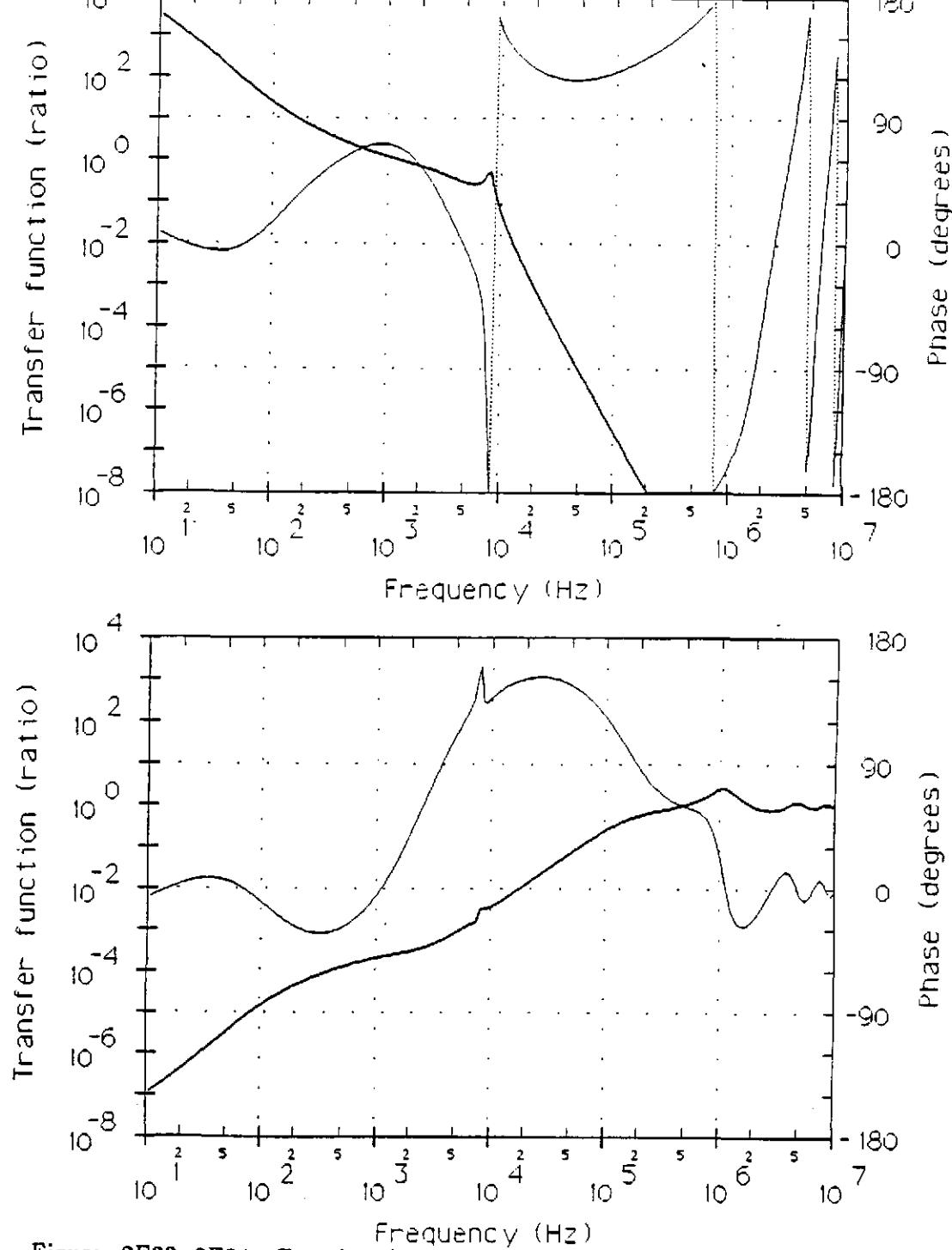
La figure 2E20 donne un schéma fonctionnel du système d'asservissement de fréquence. Le facteur de conversion de fréquence à tension par l'ensemble FP-PD-Amp-M est $\alpha_1 \text{ V} \cdot \text{Hz}^{-1}$. La conversion de tension à fréquence par l'ensemble VCO-AO est $\alpha_2 \text{ Hz} \cdot \text{V}^{-1}$. La sensibilité du PZT est $\alpha_3 \text{ Hz} \cdot \text{V}^{-1}$. Le retard de temps dans le modulateur acousto-optique ($\tau = 0.28 \mu\text{s}$) est incorporé dans sa fonction de transfert x_6 , et la première résonance mécanique dans le PZT (de fréquence $f_0 = 8 \text{ kHz}$ et surtension $Q = 10$) est modélisée dans sa fonction de transfert x_7 . Les autres fonctions de transfert $x_1 \dots x_5$ représentent les amplificateurs et filtres électriques utilisés dans la boucle d'asservissement.

Les figures 2E21 à 2E24 montrent plusieurs fonctions de transfert d'intérêt, que nous avons calculées, sous la forme de diagrammes de Bode (l'amplitude et la phase). Les figures 2E21 et 2E22 sont les fonctions de transfert pour la boucle comprenant le cristal acousto-optique, la boucle étant ouverte et fermée respectivement. Notons l'avance de phase à cause du modulateur acousto-optique; les fonctions de transfert électroniques x_1, x_2 sont choisies telles que la pente de la fonction de transfert de l'ensemble est autour de 6 dB/octave au point où le gain de la boucle est égal à l'unité (à peu près 800 kHz), qui est à une fréquence plus basse que celle où la phase dépasse -180° .

Les figures 2E23 et 2E24 montrent les fonctions de transfert pour la boucle comprenant le PZT (de même avec la boucle ouverte et fermée respectivement), dans le cas où la boucle avec le cristal acousto-optique est fermée avec le gain choisi ci-dessus. La résonance mécanique du PZT à 8 kHz limite le gain possible, et pour éviter que le système ne soit trop près de l'oscillation, le point de gain-unité est à peu près fixé à 800 Hz. Par contre, le gain monte rapidement aux fréquences basses; ceci est nécessaire parce que les bruits sismique et acoustique augmentent de la même façon.



Figures 2E21, 2E22: Fonction de transfert, boucle acousto-optique. Au-dessus : boucle ouverte. Au-dessous : boucle fermée. La ligne épaisse est l'amplitude, et la ligne fine est la phase.



Figures 2E23, 2E24: Fonction de transfert, boucle PZT. Au-dessus: boucle ouverte. Au-dessous: boucle fermée.

Les résultats obtenus avec ce système d'asservissement sont montrés dans la figure 2E25. La suppression du signal d'erreur observée est très grande; par exemple, 70 dB à 1 kHz (en accord raisonnable avec les prévisions du calcul). Le niveau absolu atteint en bruit aux hautes fréquences, $0.7 \text{ Hz} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$, est déterminé par le bruit de l'amplificateur Amp.

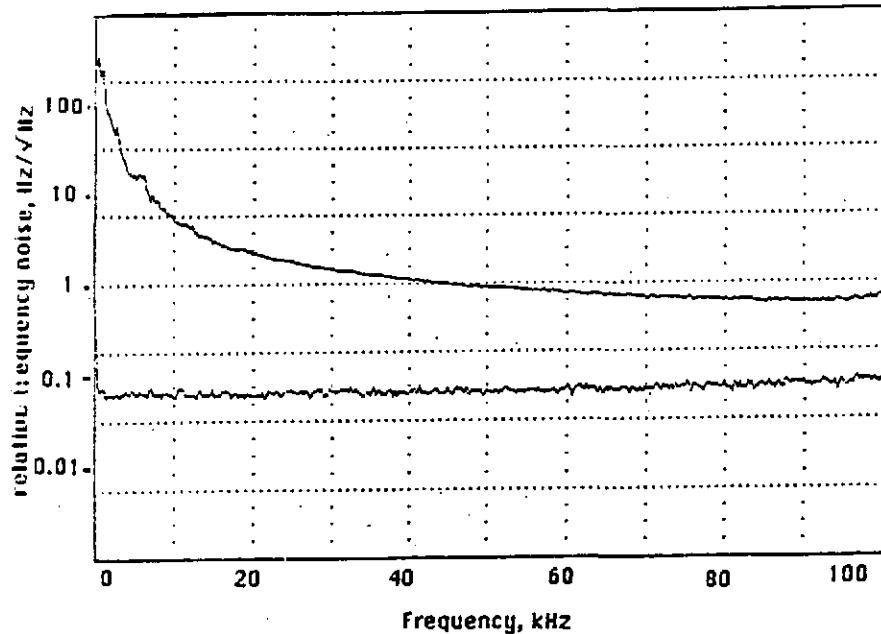


Figure 2E25 : Spectre du bruit de fréquence du laser Nd:YAG, sans et avec asservissement

Conclusions

Le système du laser Nd:YAG stabilisé activement que nous avons discuté, forme un point de départ pour le développement d'un laser Nd:YAG de haute puissance, consistant en un maître rassemblant le laser décrit ici et un laser de puissance Nd:YAG conventionnel, asservi au maître par injection.

A frequency-stabilised laser-diode pumped Nd:YAG laser

D. Shoemaker, A. Brillet, C. N. Man

Laboratoire de l'Horloge Atomique

Groupe de Recherches sur les Ondes Gravitationnelles

Bâtiment 104, CNRS, 91400 Orsay France

Laser sources exhibiting very good short-term frequency stability are necessary in most schemes for the interferometric detection of gravitational radiation ([Gertsenshtein'63], [Weiss'72], [Forward'78]) and in other precision metrology and spectroscopy experiments. The argon lasers that have been used for the prototype interferometers to date (see, for example, [Grossman'85]) cannot provide the power that will be necessary for full scale experiments, of the order of 50 watts cw. An attractive alternative is the Nd:YAG laser; however, high power Nd:YAG lasers are typically noisy due to disturbances arising from the pump illumination and the cooling system. We report here on a diode-pumped frequency-stabilized Nd:YAG laser system which will be used to injection lock a high-power Nd:YAG laser [Man'84], decoupling the problems of stabilization and power.

The laser

The laser is shown in Figure 1. One end of the Nd:YAG crystal YAG is coated for maximum reflection at 1.06 μm and > 90% transmission at 813 nm (the pump wavelength); the other end is anti-reflection coated. It is in a linear, hemispheric cavity of 7.5 cm length. The output coupler OC has a transmission of 1% and radius of curvature 30 cm and is mounted on a piezoelectric transducer PZT to allow slow changes in the length of the cavity to be corrected. The laser diode pump LD (SDL 2420) is symmetrized with a cylindrical lens CL [Scifres'82] and focussed to form a waist at the face of the Nd:YAG crystal smaller than the laser mode to ensure TEM₀₀ operation.

Although the 1.06 μm line is homogeneously broadened, spatial hole burning [Danielmeyer'71] would cause multimode oscillation. An etalon Et (uncoated glass, 0.7 mm thickness) reduces the gain of competing modes to ensure single-mode oscillation. Stress-induced birefringence in Nd:YAG can result in different frequencies of oscillation for the two orthogonal polarization states. A second glass plate at the Brewster angle Br selects a single linear polarization, and with the Nd:YAG crystal held relatively free of external mechanical stresses the introduction of the Brewster plate does not change the threshold or slope performance of the laser.

The laser threshold is at ?? mW of pump power, and for the maximum pump power available of 200 mW, the power at 1.06 μm is 40 mW. Up to 5 kHz, fluctuations of the Nd:YAG laser intensity are dominated by acoustic and mechanical disturbances of the laser cavity. For higher frequencies, relaxation-oscillations [Danielmeyer'75] driven by the laser-diode mode-hopping noise dominate; their center frequency is roughly 80 kHz, with a damping time constant of 8 μs . No evidence of 'spiking' has been seen.

The optical layout

The optical path for the frequency stabilization is indicated in figure 2 by the dotted lines. An acousto-optic modulator AO serves as an isolator and as a fast frequency control element; a waist is formed in the modulator by lens L₁, and the beam is recollimated by lens L₂. An electro-optic modulator EO impresses a 10 MHz phase modulation of peak amplitude m radian on the beam for the system of synchronous detection. A Fabry-Perot cavity FP (10 cm long, finesse ~20) is used as the frequency reference. The incoming laser beam is closely matched to the TEM₀₀ mode of the reference cavity with the lens L₃; the cavity is nondegenerate to reduce the coupling from transverse motions of the beam into apparent frequency fluctuations. The light reflected from the cavity [Pound'46], Drever'83]] is separated from the incoming beam with polarisation optics Pol, $\lambda/4$, and falls on the photodetector PD.

2 Results

The detection of frequency fluctuations

The Fabry-Perot cavity is used in the immediate neighborhood of resonance. In this regime, the signal voltage from the phase sensitive detector is proportional to

$$I_0 K G_1 \frac{4\pi l(f - f_0)}{c} J_0 J_1 \cdot F$$

The incident light is characterised by its frequency f , and the incoming intensity I_0/η , where η is the efficiency in A/W of the photodetector and of which a proportion K is in the TEM₀₀ mode of the Fabry-Perot. G_1 is the net gain, in volts/ampere, of the photodiode amplifier and the mixer. The Fabry-Perot is of length l and resonance frequency f_0 . The Bessel functions $J_0(m)$ and $J_1(m)$ have as their argument the phase modulation strength m impressed by the Pockels cell. F is the finesse of the Fabry-Perot cavity, and the constant of proportionality is dependent on the losses of the mirrors. Typical conditions are $I_0 = 1.4 \cdot 10^{-4}$ A (corresponding to roughly 0.04 mW), $K \approx 0.9$, $G_1 = 4.4 \cdot 10^5$ V/A, $l=0.07$ m, and $m=0.172$. The measured sensitivity is $S = 3.28 \cdot 10^{-7}$ V · Hz⁻¹, which with the known finesse of $F = 320$ gives a constant of proportionality of roughly 3.

This signal is to be compared with the quadratic sum of the photodiode amplifier noise $I_{amp} = \sqrt{2eI_{amp}}$, where I_{amp} is the amplifier noise expressed as an equivalent photocurrent and the shot noise of the photocurrent $\sqrt{2eI_{phot}}$ (with e the electron charge); we have for the linear spectral density of the noise voltage N

$$N = G_1 \sqrt{2e(I_{phot} + I_{amp})}$$

The measured photocurrent I_{phot} when the Fabry-Perot is on resonance is $I_{phot} = 7.5 \cdot 10^{-6}$ A; this is smaller than the amplifier noise $I_{amp} = 3 \cdot 10^{-4}$ A which dominates for these measurements. The signal-to-noise ratio is unity for 0.7 Hz · Hz⁻¹.

The servo-system

The signal path for the servo system is indicated by the solid lines in figure 2. Two loops are nested to obtain a combination of bandwidth and dynamic range. The inner loop, consisting of the photodiode PD, mixer M, gain G_1 , filter H_1 , and the voltage controlled oscillator VCO, uses the acousto-optic modulator AO as the control element; the principal limitation in the gain-bandwidth of the servo-system is given by the delay $\tau = 0.28$ μ s in this modulator. To keep this response time to a minimum, the Nd:YAG beam is focussed down to a small waist in the modulator crystal, and the beam is placed close to the acoustic transducer. The outer loop, with filter H_2 and high-voltage amplifier G_2 , utilizes the piezo-electric transducer PZT of the laser output coupling mirror as the control element. Here the first mechanical resonance of ≈ 8 kHz in the transducer limits the gain-bandwidth possible. The laser frequency can be controlled over about one-half free spectral range, or 500 MHz. To take advantage of the bandwidths available, the slope of the feedback network H_2 is 12 db/octave until the region of the unity-gain frequency, where it becomes 6 dB/oct.; and for H_1 it is maintained at 9 dB/oct.

The calculated closed-loop transfer-function for frequency fluctuations is shown in figure 3. The unity-gain frequency of the inner loop is typically 500 kHz and that of the outer loop 1 kHz. The calculated suppression of frequency noise in the kilohertz range is of the order of 10^4 (or 80 dB).

Results

Figure 4 shows the frequency noise of the Nd:YAG laser as measured at the error point of the servo-system. Curve (a) is the unstabilized noise; the measurement noise floor of 0.7 Hz · Hz⁻¹ is indicated. Local mechanical and acoustic disturbances are responsible for the steep rise at low frequencies. At the present detection sensitivity, the relaxation oscillations do not influence the frequency noise. Curve (b) is the error point signal for the stabilized laser. While it is not an independent measure of the frequency fluctuations, this curve shows the suppression available with the servo-system, which agrees reasonably well with the predictions of the loop performance.

In a separate experiment, a power-stabilization servo-system was demonstrated. The control element was the acousto-optic device, used as an amplitude modulator. The unity-gain bandwidth and suppression of power fluctuations at kilohertz frequencies similar to those for the frequency stabilisation were achieved. This stabilization loop could be used simultaneously with the frequency stabilization system.

Conclusions

The first steps toward a high-power short-term frequency stable Nd:YAGlaser have been made. A practical system for a low-power reference oscillator has been demonstrated, which will be used to injection-lock a high-power Nd:YAG laser. Initial experiments with a Micro-Control Nd:YAG amplifier in a computer-optimized [Metcalf'87] 'Z'-type ring cavity show that TEM₀₀ operation in a single longitudinal mode, without spatial filters or frequency-selective elements, at power levels of several watts, is possible. We are optimistic that a Nd:YAG laser source suitable for the interferometers planned for the detection of gravitational waves will soon be available.

We wish to thank O. Cregut and G. Kerr for their participation in this work.

References

- Danielmeyer'71:
H. Danielmeyer: *Effects of Drift and Diffusion of Excited States on Spatial Hole Burning and Laser Oscillation*, J. Appl. Physics, **35** (1971) 3125
- Danielmeyer'75:
H. Danielmeyer: *Progress in Nd:YAG Lasers*, in *Lasers, a series of advances*, ed. A. Levine et A. DeMaria, pub. Marcel Dekker, New York et Basel (1972)
- Drever'63:
R. Drever, J. Hall, F. Kowalski, J. Hough, G. Ford, A. Munley, H. Ward: *Laser Phase and Frequency Stabilization Using an Optical Resonator*, Appl. Phys. **B 31**, (1983) 97-105
- Forward'78:
R.L. Forward: *Wideband laser interferometer gravitational radiation experiment*, Phys. Rev. D **17** (1978) 379-390
- Gertsenshtein'63:
M. E. Gertsenshtein, V.I. Pustovoit: *On the detection of low frequency gravitational waves*, Sov. Phys.-JETP **16** (1963) 433-435
- Grossmann'85:
MG4: *Proceedings of the Fourth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, ed. R. Ruffini, Rome 1985, Elsevier(1986)
- Man'84:
C.N. Man, A. Brillet: *Injection locking of argon-ion lasers*, Opt. Lett. **9** (1984) 333-334
- Metcalf'87:
D. Metcalf, P. de Giovanni, J. Zachorowski, M. Leduc: *Laser resonators containing self-focusing elements*, Appl. Opt. **26** (1987) 4508-4517
- Pound'46:
R. Pound: Rev. Sci. Instrum. **17**, (1946) 490—505
- Scifres'82:
D. Scifres, R. Sprague, W. Streifer, R. Burnham: *Focusing of a 7700-Å high power phased array semiconductor laser*, Appl. Phys. Lett. **41**(12) (1982) 1121
- Weiss'72:
R. Weiss: *Electromagnetically coupled broadband gravitational antenna*, Quarterly Progress Report, Research Laboratory of Electronics, MIT **105** (1972) 54-76

Nd:YAG master oscillator

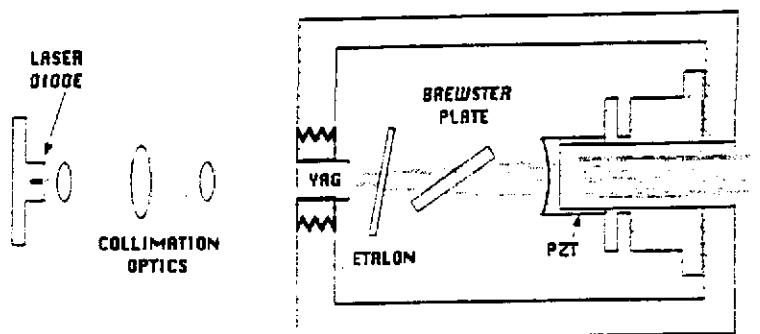


Figure 1

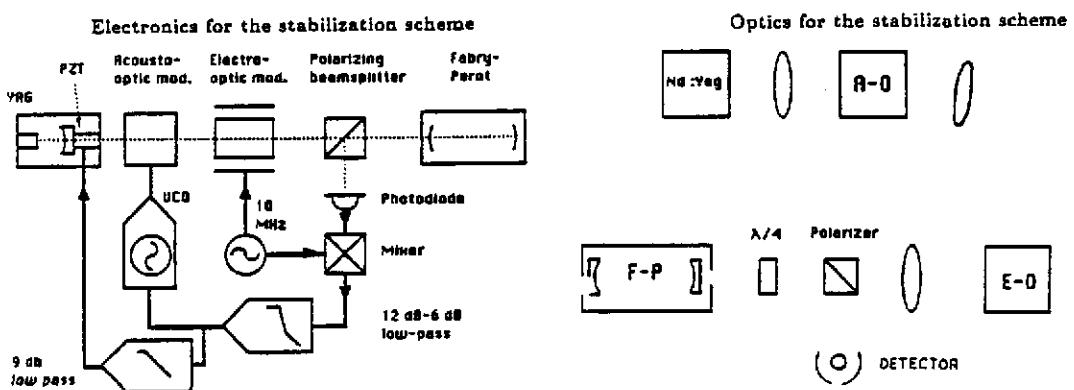


Figure 2

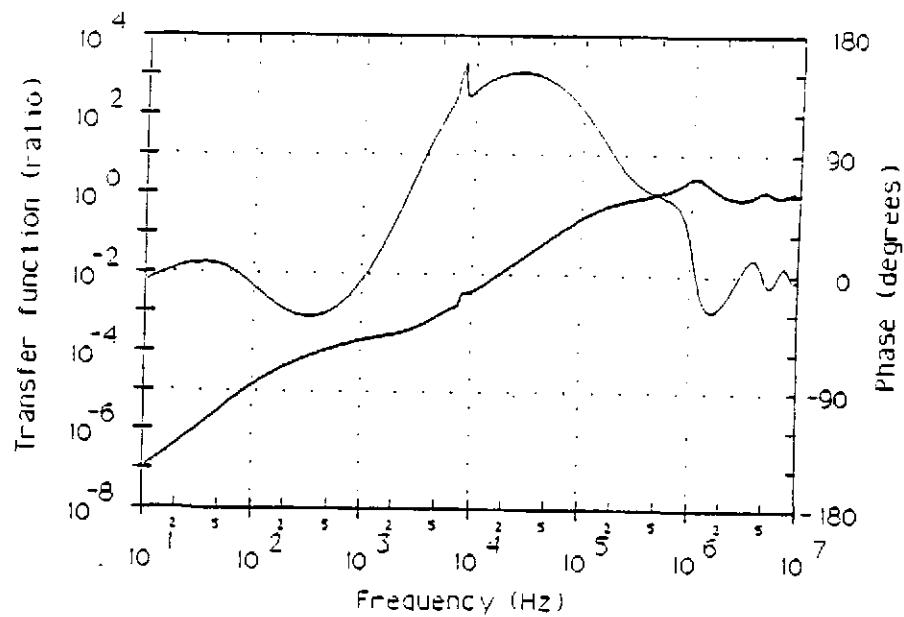


Figure 3

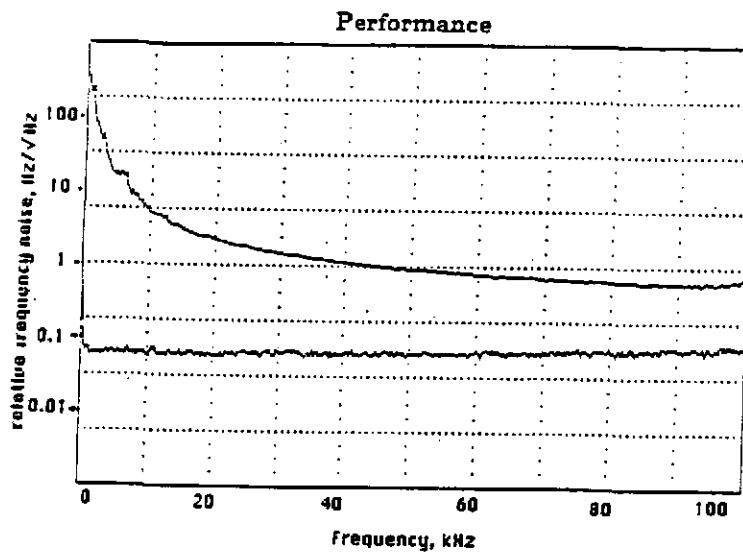


Figure 4

3) Conclusions

Nous avons présenté dans cette thèse, notre travail dans le domaine de la détection des ondes gravitationnelles par interférométrie. La conversion d'un signal lumineux en un signal électrique, comprenant la question du rapport signal-bruit possible, a été décrite. Les concepts et le fonctionnement des systèmes d'isolation sismique réels ont été discutés. Nous avons montré plusieurs systèmes de contrôle et d'alignement avec leurs avantages et inconvénients. Finalement, notre développement d'un laser Nd:YAG stabilisé a été présenté.

Chacun des sujets discutés a atteint une conclusion satisfaisante : les expériences ont montré un accord raisonnable avec les prévisions théoriques, et les sous-systèmes ont bien fonctionné dans les interféromètres d'étude. Cependant, il reste des problèmes à résoudre parmi les sujets discutés avant de pouvoir construire les grands interféromètres.

Les puissances plus importantes exigent des études des schémas de détection qui évitent les modulateurs dans le chemin optique principal, et des photodétecteurs capables de résister à quelques 50 W.

Les prévisions des astrophysiciens indiquent que les fréquences basses (10 à 100 Hz) sont très intéressantes, en particulier pour la détection des systèmes binaires. En conséquence, la performance des systèmes d'isolation sismique doit être améliorée à basse fréquence, ce qui demande non seulement un filtrage meilleur, mais aussi un bruit thermique réduit.

Il apparaîtra des problèmes nouveaux spécifiques aux longueurs kilométriques, et en particulier avec l'alignement et le contrôle des masses-test. Les cavités Fabry-Perot sont prometteuses comme moyen de stockage de la lumière, mais elles exigent des systèmes d'alignement automatiques.

Nous avons fait la première étape vers une source laser Nd:YAG pour illuminer les interféromètres, mais il faut perfectionner les lasers de puissance monofréquence, puis découvrir et résoudre les problèmes liés à la technique d'injection.

Heureusement, aucun de ces sujets ne présente de problèmes inabordables, et le travail qui reste à faire est intéressant et riche en physique. On espère avoir les moyens financiers de construire les grandes antennes d'ici plusieurs années; nous sommes certain que les difficultés expérimentales seront résolues à temps.

4) Références

Billing'78:

H. Billing, K. Maischberger, A. Rüdiger, R. Schilling, L. Schnupp, and W. Winkler: *A wide-band laser interferometer for the detection of gravitational radiation*, Ninth Texas symposium on Relativistic Astrophysics, Munich 1978, rapport interne Max-Planck MPI-PAE/Astro 175

Billing'79:

H. Billing, K. Maischberger, A. Rüdiger, R. Schilling, L. Schnupp, and W. Winkler: *An argon laser interferometer for the detection of gravitational radiation*, J. Phys. E: Sci. Instrum. **12** (1979) 1043-1050

Biraben'79:

F. Biraben: *Efficacité des systèmes unidirectionnels utilisables dans les laser en anneau*, Optics Comm. **29** (1979) 353

Born'75:

M. Born, E. Wolf: *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford (1975)

Brillet'83:

A. Brillet et P. Tourrenc, dans N. Dereulle et T. Piran: *Rayonnement Gravitationnel*, North-Holland (1983)

Butler'84:

J. Butler, D. Ackley, D. Botez: *Coupled-mode analysis of phase-locked injection laser arrays*, Appl. Phys. Lett. **44** (1984) 293

Callen'51:

B. Callen, T. Welton: *Irreversability and Generalized Noise*, Phys. Rev. **83** (1951) 34

Clark'79:

J. Clark: *The role of binaries in gravitational wave production*, dans *Sources of Gravitational Radiation*, éd. L. Smarr, Cambridge University Press (1979)

Danielmeyer'71:

H. Danielmeyer: *Effects of Drift and Diffusion of Excited States on Spatial Hole Burning and Laser Oscillation*, J. Appl. Physics, **35** (1971) 3125

Danielmeyer'75:

H. Danielmeyer: *Progress in Nd:YAG Lasers*, dans *Lasers, a Series of advances*, éd. A. Levine et A. DeMaria, pub. Marcel Dekker, New York et Basel (1972)

Lindsay'83:

P. Lindsay, P. Saulson, R. Weiss: *A study of a long baseline gravitational wave antenna system*, MIT, Cambridge MA (1983)

Livas'85:

J. Livas, R. Benford, D. Dewey, A. Jeffries, P. Saulson, D. Shoemaker, R. Weiss: *The MIT prototype gravitational wave detector*, dans MG4: Proceedings of the Fourth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, éd. R. Ruffini, Rome 1985, Elsevier (1986)

Livas'87:

J. Livas: *Upper limits for gravitational radiation from some astrophysical sources*, Thèse, Massachusetts Institute of Technology (1987)

Man'84:

C.N. Man, A. Brillet: *Injection locking of argon-ion lasers*, Opt. Lett. 9 (1984) 333-334

Michelson'87:

A. Michelson, E. Morley: American Journal of Science 34 (1887) 333

Michelson,P'83:

P.F. Michelson: *The low temperature gravitational wave detector at Stanford University*, dans *Gravitational Radiation*, Les Houches 1982, éds.

N. Deruelle, T. Piran, North-Holland Publ. Co. (1983) 465-474

Michelson,P'87:

P. Michelson, J. Price, R. Taber: *Resonant-Mass Detectors of Gravitational Radiation*, Science 237 150-157 (1987)

Misner'73:

W. Misner, K. Thorne, J. Wheeler: *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1973)

Morse'68:

P. Morse, K. Ingard: *Theoretical Acoustics*, McGraw Hill, New York (1968)

Nye'60:

J. Nye: *Physical properties of crystals*, Oxford University Press, London (1960)

Owa'86:

S. Owa et al. dans MG4: Proceedings of the Fourth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, éd. R. Ruffini, Rome 1985, Elsevier(1986)

Pound'46:

R. Pound: Rev. Sci. Instrum. 17, (1946) 490—505

Quinn'87:

T. Quinn: communication privée.

Reif'65:

F. Reif: *Fundamentals of statistical and thermal physics*, McGraw Hill, New York (1965)

Robertson'81:

N. Robertson: *Experiments relating to the detection of gravitational radiation and to the suppression of seismic noise in sensitive measurements*, Thèse, University of Glasgow (1980)

Robertson'82:

N.A. Robertson, R.W.P. Drever, I. Kerr, J. Hough: *Passive and active seismic isolation for gravitational radiation detectors and other instruments*, J. Phys. E: Sci. Instrum. 15 (1982) 1101-1105

Ruediger'81:

A. Rüdiger, calcul non publié (1981)

Saenz'78:

R. Saenz, S. Shapiro: *Gravitational radiation from stellar collapse: ellipsoidal models*, Astrop. J. 221 (1978) 286-303

Saulson'84:

P. Saulson: *Terrestrial gravitational noise on a gravitational wave antenna*, Phys. Rev. D, 30 732

Saulson'84b:

P.R. Saulson: *Vibration isolation for broadband gravitational wave antennas*, Rev. Sci. Instrum. 55 (1984) 1315-1320

Schawlow'58:

A. Schawlow, C. Townes: *Infrared and Optical Masers*, Phys. Rev. 112 (1958) 1940

Scifres'82:

D. Scifres, R. Sprague, W. Streifer, R. Burnham: *Focusing of a 7700-Å high power phased array semiconductor laser*, Appl. Phys. Lett. 41(12) (1982) 1121

Shoemaker'85:

D. H. Shoemaker, W. Winkler, K. Maischberger, A. Rüdiger, R. Schilling and L. Schnupp: *Progress with the 90 m prototype for an interferometric gravitational wave detector*, Fourth Marcel Grossmann Meeting, Rome 1985, Elsevier (1986) 605-614

Speake'87:

C. Speake: communication privée.

Stark'85:

R. Stark, T. Piran: *Gravitational-wave emission from rotating gravitational collapse*, Phys. Rev. Lett. 55, 891 (1985)

Taylor'82:

J.H. Taylor, J.M. Weisberg: *A new test of general relativity: gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16*, *Astrophys. J.* **253** (1982) 908

Thorne'83:

K. Thorne: Le premier chapitre dans N. Dereulle et T. Piran: *Rayonnement Gravitationnel*, North-Holland (1983)

Thorne'87:

K. Thorne: *Gravitational radiation*, Caltech Goldenrod Preprint *GRP-109* (1987)

Weber'60:

J. Weber: *Phys. Rev. Lett.* **117** (1969) 306

Weber'69:

J. Weber: *Evidence for discovery of gravitational radiation*, *Phys. Rev. Lett.* **22** (1969) 1320-1324

Weiss'72:

R. Weiss: *Electromagnetically coupled broadband gravitational antenna*, Quarterly Progress Report, Research Laboratory of Electronics, MIT **105** (1972) 54-76

Weiss'78:

R. Weiss: *Gravitational radiation - The status of the experiments and prospects for the future* dans *Sources of Gravitational Radiation*, éd. L. Smarr, Cambridge University Press (1979)

Weiss'86:

R. Weiss: communication privé.

Winkler'83:

W. Winkler: *Eine optische Verzögerungsleitung für ein Breitband-Gravitationswellenexperiment*, Dissertation, München 1983, rapport interne MPQ 74

Yariv'76:

A. Yariv: *Introduction to Optical Electronics*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1976)